

# IL NUOVO CIMENTO

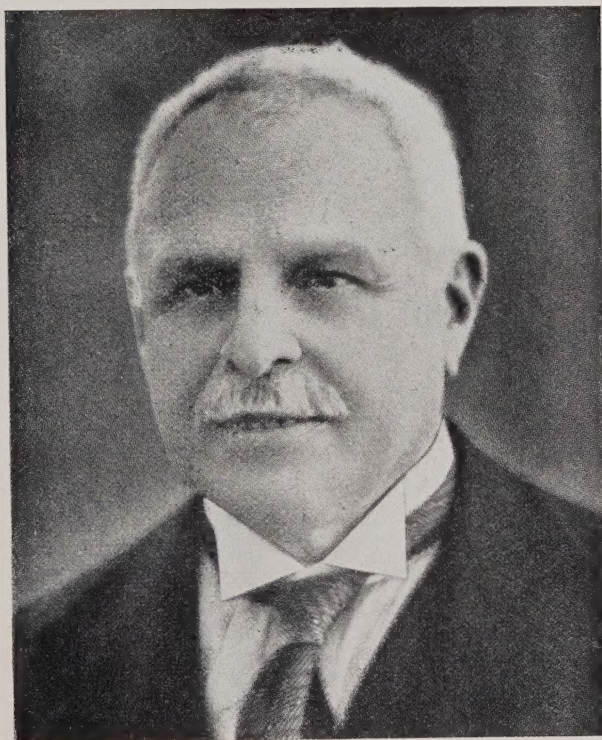
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA  
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 4

*Serie nona*

1 Aprile 1951

IN MEMORIA DI  
GIOVANNI GIORGI



Il 19 Agosto moriva improvvisamente a Castiglioncello GIOVANNI GIORGI. Era ormai di età avanzata, ma sembrava che gli anni non riuscissero a intaccare la sua eccezionale fibra di studioso e ricercatore. Nessuno supponeva che il mondo scientifico stesse per subire una tale perdita.

GIOVANNI GIORGI nacque a Lucca, il 27 Novembre 1871, da famiglia in cui era tradizionale il dedicarsi a professioni legali o amministrative. Nondimeno, come amava raccontare, prese fin da bambino la ferma risoluzione di divenire ingegnere e la sua famiglia non potè molto insistere nel dissuaderlo: prima che egli accedesse all'Università, la sua naturale tendenza a riflettere per conto proprio nettamente si era affermata, accanto a una vera passione per le scienze fisiche, comprese quelle che, come l'ottica fotografica e l'elettrotecnica, si trovavano ancora ai primordi.

Questa passione lo ha accompagnato per tutta la vita e ben a ragione egli soleva dire « ho sempre sentito e inteso scienza pura e ingegneria come unite insieme ». Questa passione si estendeva fino alla storia naturale e in specie alla zoologia, anzi egli lascia una preziosa raccolta di conchiglie. Volendo dare almeno un cenno dell'eccezionale vastità della sua cultura, neppure possono passarsi sotto silenzio le sue approfondite conoscenze linguistiche, letterarie, artistiche. È del GIORGI l'articolo « Cromatica » dell'Enciclopedia italiana.

Décisamente formativi furono per Lui i cinque anni che trascorse all'Università e alla Scuola d'ingegneria di Roma, sia per il diretto contatto con un Maestro d'eccezione, Luigi Cremona, sia per la lettura e meditazione del trattato di elettricità del Maxwell e della *Meccanica* di Thomson e Tait. Come ha fatto sapere nel comunicarne la morte all'Accademia dei Lincei, il prof. Castelnuovo già in quell'epoca ebbe occasione di apprezzare in ripetute conversazioni le acute riflessioni del GIORGI, ancora studente, sui principi della Geometria e i postulati della Dinamica.

Il GIORGI conseguì il diploma di ingegnere nel 1893, con una tesi sulla elettrificazione di una ferrovia. Nel 1897 già era gerente della Società Giorgi-Arabia e C. per impianti elettrici e meccanici. Dal 1905 fu pure gerente della Società Meridionale Lahmeyer di Elettricità. I lavori da Lui eseguiti prima del 1906 comprendono diverse centrali idroelettriche, i relativi impianti di trasmissione e distribuzione, la ferrovia elettrica Castelraimondo-Camerino.

È del 1906 la nomina a direttore dell'ufficio tecnologico del Comune di Roma: così soprintendette ai servizi pubblici industriali dell'Urbe fino al 1921. Sue furono la progettazione e l'organizzazione dell'azienda elettrica municipale, con centrale termica, centrali idroelettriche varie sull'Aniene e distribuzione in città. Altrettanto fece per la rete tranviaria e per gli impianti frigoriferi municipali.

Negli stessi anni anche collaborò a progetti per le ferrovie a elettrovapore russe e per l'utilizzazione delle forze idriche dell'Isonzo; a perizie per la validità dei brevetti sulle lampadine a filamento metallico; a in-



chieste sui telefoni dello Stato, sull'azienda Gas a Palermo e su altre aziende pubbliche. Ma un'attività pratica tanto varia ed efficace non riuscì a distrarlo dalla ricerca scientifica e nemmeno impedì che si rivelasse in Lui un acuto spirito critico.

Le numerosissime pubblicazioni del GIORGI (circa trecentocinquanta) si iniziarono subito dopo la laurea, con una serie di articoli nel periodico *L'Elettricista* di Roma. Una sua lettera del 1895 all'Editore della rivista *The Electrician* di Londra mostra che fin da allora Egli pensava a decise innovazioni nella sistemazione della scienza elettrica. Però definì la proposta di una metrologia a quattro unità fondamentali solo nel 1901, in una comunicazione al congresso dell'Associazione elettrotecnica a Roma, comunicazione che, sempre col titolo « Unità razionali di elettromagnetismo », fu ripetuta l'anno successivo al congresso della Società di Fisica a Brescia.

Si trattava, con parole dello stesso GIORGI, di un problema triplice: 1) « razionalizzare » le unità elettriche nel senso di Heaviside, cioè adattarle in modo che le equazioni venissero liberate dal  $4\pi$  fuori di luogo; 2) sostituire un sistema di misura unico, adatto tanto per gli scopi scientifici, quanto per quelli pratici, ai molteplici sistemi fino allora in uso, compresi i due sistemi C.G.S.; 3) mettere in evidenza che le due costanti, elettrica e magnetica, dello spazio vuoto, sono entrambe costanti fisiche, a cui deve attribuirsi un valore molto inferiore all'unità, per tener conto che lo spazio libero da materia ponderabile ha una reattività estremamente piccola, tanto per le azioni elettriche, quanto per le azioni magnetiche.

Già Maxwell aveva osservato che non era possibile ottenere una teoria corretta dell'elettricità senza portare a quattro le unità fondamentali, ma il GIORGI ebbe la ventura di riconoscere che si poteva costituire un sistema di misura irreprensibile sotto ogni punto di vista semplicemente aggiungendo al metro, al kilogrammo-massa e al secondo, come quarta unità fondamentale e arbitraria, una qualunque delle unità elettrotecniche già in uso pratico: ad es. il coulomb, definibile per via elettrolitica, o l'ohm, definito per mezzo di un campione metallico da conservarsi negli archivi.

Queste proposte, specie all'estero, molto lentamente guadagnarono favore. In definitiva il « sistema Giorgi » fu adottato nel 1935 dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale con l'unanimità dei voti di tutti i delegati delle varie nazioni. Una serena esposizione delle vicende che precedettero e hanno fatto seguito a tale riconoscimento ufficiale è contenuta, insieme a una completa bibliografia, in uno dei capitoli dell'ultimo libro del GIORGI, comparso due anni fa col titolo *Verso l'elettrotecnica moderna*. In questo volume sono limpidamente coordinate anche altre delle sue ri-

cerche di elettromagnetismo ed elettrotecnica, senza insistere su quelle che richiesero mezzi analitici elevati.

Il GIORGI iniziò fin dai primi del secolo e poi condusse molto avanti la revisione e sistemazione dei metodi di calcolo operatorio funzionale creati da Heaviside, effettuandone svariatissime, efficaci applicazioni. Certo a lui spetta il merito di avere dato la formula di valutazione del più generale operatore. Al GIORGI sono pure dovute ricerche sulle equazioni integrali, nella teoria delle funzioni e in altri campi della matematica pura. Tutte le volte che egli voleva, appariva chiara la sua completa padronanza dei metodi matematici, anzi Egli lascia anche un compendio di storia delle matematiche, pubblicato nel 1948 sulla base di un manoscritto più esteso che è rimasto incompleto.

Dal 1910 al 1913 impartì corsi di Analisi superiore alla Facoltà di Scienze di Roma. Dal 1912 al 1914 fu ordinario di Meccanica superiore nella scuola di costruzioni aeronautiche dipendente dal Ministero della guerra, dal 1924 al 1927 incaricato di Economia e organizzazione industriale nella Scuola di ingegneria di Roma, dal 1926 al 1929 titolare di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nell'Università di Cagliari. Dal 1929 al 1934 tenne gli stessi insegnamenti a Palermo. Alla fine del 1934 tornò alla Scuola d'ingegneria di Roma, come ordinario di Comunicazioni elettriche, e più tardi tenne pure qualche ciclo di conferenze nell'Istituto di Alta Matematica.

I suoi corsi di Meccanica, oltre che a vari volumi di litografie, hanno dato luogo al trattato che fu finito di stampare nel 1946. In quest'opera evidentemente Egli ha cercato, anche attraverso a una ricca bibliografia, di prospettare i diversi punti di vista e i diversi metodi di trattazione della scienza meccanica, pur mettendo nella dovuta luce i suoi contributi personali e in specie le sue acute indagini sui postulati della Statica e sulle leggi fondamentali della Dinamica.

Il GIORGI aveva una indiscussa autorità fra i cultori delle teorie relativistiche. Entrò in corrispondenza con Einstein fino dall'epoca delle prime pubblicazioni sulla relatività ristretta. Nel 1934 conseguì uno dei premi Rignano nel concorso internazionale per uno studio sulla evoluzione della nozione di tempo.

Apparteneva all'Accademia dei Lincei dal 1927 e all'Accademia Pontificia dal 1936. Era stato Accademico d'Italia e Socio ordinario dell'Accademia dei Nuovi Lincei. Naturalmente era pure membro di accademie e istituzioni scientifiche straniere: più di un cinquantennio di mirabile attività scientifica e tecnica, nonchè la sua fattiva partecipazione a molti congressi internazionali, lo avevano reso noto in tutto il mondo.



## Distribuzione nell'atmosfera delle componenti mesonica ed elettronica della radiazione cosmica.

P. CALDIROLA e P. GULMANELLI

*Istituto di Fisica dell'Università - Milano*

(ricevuto il 31 Gennaio 1951)

**Riassunto.** — Partendo da risultati stabiliti in una teoria precedentemente sviluppata da uno di noi per la generazione della componente mesonica nell'atmosfera, viene calcolata la distribuzione in questa dei mesoni lenti, dei mesoni veloci e degli elettroni, tenendo conto per il calcolo di quest'ultima dei contributi derivanti dalla disintegrazione dei neutroni, dalla disintegrazione dei mesoni  $\mu$  e dai processi di knock-on. Si confrontano i risultati dei calcoli con i dati sperimentali.

### Generalità.

È stata precedentemente sviluppata da uno di noi <sup>(1)</sup> una teoria relativa al comportamento nell'atmosfera della componente nucleonica di elevata energia e di quella mesonica da essa derivante. Tale teoria è basata su uno schema ben definito per la produzione dei mesoni in processi d'urto tra nucleoni, schema che sostanzialmente rientra nel tipo di produzione plurima nel senso di HEITLER e JANOSSY. Molteplicità basse (di qualche unità) sono però previste per energie dei nucleoni incidenti di qualche decina di GeV.

I risultati sono soddisfacenti, soprattutto per quel che riguarda le previsioni relative alla dipendenza dell'eccesso positivo della componente mesonica dall'energia e dalla profondità atmosferica <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>. Ciò è stato ulteriormente confermato da successive esperienze sull'eccesso positivo a diverse quote e sulla sua dipendenza dall'angolo zenitale <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949). Indicato come Nota (I).

<sup>(2)</sup> P. CALDIROLA e A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **7**, 161 (1950).

<sup>(3)</sup> I. F. QUERCIA, B. RISPOLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 715 (1950).

La teoria è stata poi applicata <sup>(4)</sup> anche allo studio dell'effetto di latitudine della componente nucleonica (protoni e neutroni), l'esistenza del quale è stata definitivamente provata in un lavoro recentemente pubblicato da PICCIONI e WALSH <sup>(5)</sup>.

Dati i risultati incoraggianti ottenuti nei calcoli precedenti, ci siamo proposta l'applicazione di tale teoria anche allo studio della distribuzione nell'atmosfera della componente elettronica (e.e.); ciò ci è sembrato interessante dal momento che a questo riguardo esiste un discreto numero di misure sperimentali. In relazione a questo problema abbiamo trovato opportuno eseguire anche un calcolo numerico particolareggiato circa la legge di distribuzione nell'atmosfera rispettivamente dei mesoni lenti e dei mesoni veloci, quale essa risultava determinata dalle formule della Nota (I).

### § 1. — Componente mesonica.

La distribuzione dei mesoni  $\mu$  nell'atmosfera (in assenza del taglio operato dal campo magnetico terrestre) è stata esplicitamente dedotta nella Nota (I). Considerando separatamente mesoni positivi e negativi tale legge è rappresentata dalle formule.

$$(1) \quad g^{\pm}(W, l) = R(W, l) [7\Phi_{\alpha}(W, l) \pm 3\Phi_{\beta}(W, l)] \quad \text{per } W > qE_{\pi} = W_0$$

$$(2) \quad g^{\pm}_{<}(W, l) = R(W, l) [7\Phi_{\alpha}(W_0, l) \pm 3\Phi_{\beta}(W_0, l)] \quad \text{per } W < W_0$$

ove si è posto:

$$(3) \quad R(W, l) = \frac{P_0}{24} \frac{s}{q} \left(\frac{\delta}{q}\right)^{-s-1} \left(\frac{W}{\delta}\right)^{\frac{B/\delta}{l+W/\delta}},$$

$$(4) \quad \Phi_{\alpha}(W, l) = \int_0^l \exp[-qx] x^{\frac{B/\delta}{l+W/\delta}} \left(\frac{W}{\delta} + l - x\right)^{-\frac{B/\delta}{l+W/\delta} - s - 1} dx.$$

Per il significato dei parametri, di cui solo  $P_0$  risulta indeterminato, si vedano le precedenti note.  $W$  è l'energia totale dei mesoni  $\mu$ ;  $l$  è la profondità misurata in unità caratteristiche del processo d'urto nucleone-nucleone.

Considerando la componente mesonica totale (positivi + negativi) si ha pertanto

$$(1') \quad g(W, l) = 14 R(W, l) \Phi_{\alpha}(W, l)$$

$$(2') \quad g_{<}(W, l) = 14 R(W, l) \Phi_{\alpha}(W_0, l).$$

<sup>(4)</sup> P. CALDIROLA e G. ZIN: *Nuovo Cimento*, **7**, 575 (1950), indicato come nota (III).

<sup>(5)</sup> T. G. WALSH e O. PICCIONI: *Phys. Rev.*, **80**, 619 (1950).



Calcolate le curve che determinano lo spettro energetico in corrispondenza di diversi valori della profondità atmosferica  $l$ , si è proceduto mediante integrazione numerica alla valutazione del numero di mesoni presenti a una profondità generica. Allo scopo di effettuare il confronto con le curve sperimentali di Rossi <sup>(6)</sup> si sono distinti, secondo il criterio fissato da questo autore, i mesoni veloci ( $W > 3,3 \cdot 10^8$  eV) da quelli lenti ( $W < 3,3 \cdot 10^8$  eV).

I risultati ottenuti sono riportati nei grafici di figg. 1 e 2: l'unico parametro ancora indeterminato,  $P_0$ , è stato scelto in modo che il numero calcolato dei mesoni veloci alle profondità atmosferiche medie (intorno ai  $500 \text{ g/cm}^2$ ) coincidesse con il valore sperimentale.

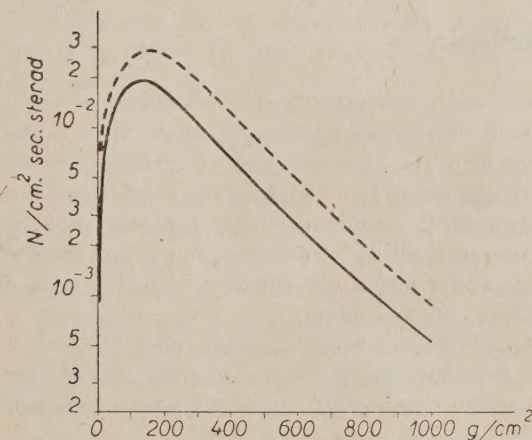


Fig. 2. - Distribuzione nell'atmosfera dei mesoni lenti.  
 ——— curva sperimentale (Rossi)  
 - - - - - curva teorica.

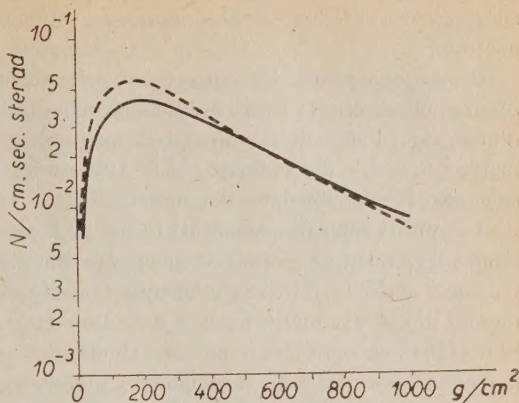


Fig. 1. - Distribuzione nell'atmosfera dei mesoni veloci.  
 ——— curva sperimentale (Rossi)  
 - - - - - curva teorica.

Si è seguito questo criterio in quanto i dati relativi alla distribuzione dei mesoni veloci sono più attendibili che non quelli, assai incerti, relativi ai mesoni lenti.

Come si vede dalla fig. 1, l'assorbimento teorico è un po' più rapido che non quello sperimentale. (Nel tratto che si può ritenere esponenziale, vale a dire per profondità  $> 300 \text{ g/cm}^2$ , al primo corrisponde un coefficiente di  $\sim 410 \text{ g/cm}^2$  e al secondo di  $\sim 460 \text{ g/cm}^2$ ). La posizione del massimo della

<sup>(6)</sup> B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

curva teorica è a  $\sim 200$  g/cm<sup>2</sup>, in ottimo accordo con quella sperimentale.

Se si tiene conto delle incertezze delle misure e delle semplificazioni contenute nella teoria (schema unidimensionale, ipotesi semplificatrici sulla sezione d'urto, ecc.) l'accordo si può considerare soddisfacente. Con il valore del parametro  $P_0$  così determinato ( $4,8 \cdot 10^{16}$  cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> sterad<sup>-1</sup> eV<sup>1,8</sup>) abbiamo poi calcolato la distribuzione dei mesoni lenti.

I risultati sono rappresentati in fig. 2. Il numero calcolato dei mesoni lenti risulta lievemente superiore a quello sperimentale, ma ciò non è di molta importanza data la limitata efficienza dei dispositivi sperimentali a registrare mesoni di energia molto bassa e data l'incertezza di cui le misure sono affette. Si noti però che con una opportuna rinormalizzazione della curva teorica questa potrebbe essere portata a coincidere pressochè esattamente con quella sperimentale: il coefficiente teorico di assorbimento dei mesoni lenti è in accordo cioè con quello sperimentale. Possiamo quindi concludere che anche per la distribuzione di questi mesoni, l'accordo tra teoria ed esperienza si deve ritenere soddisfacente.

## § 2. - Componente elettronica.

### 2.1. - Schematizzazione del problema.

Vogliamo ora occuparci della distribuzione della c.e. nell'atmosfera.

È noto che la componente elettromagnetica (elettroni + fotoni) della radiazione cosmica (r.c.) può essere generata attraverso diversi processi, di cui attualmente il più efficace si ritiene essere la disintegrazione del neutretto in due fotoni. Infatti esperienze recenti<sup>(7)</sup>, condotte sia sui neutretti prodotti artificialmente in laboratorio, sia su quelli della r.c., tendono a provare che il neutretto si disintegra, con una vita media non superiore a  $10^{-14}$  s (vale a dire in modo pressochè istantaneo), in due fotoni.

Dato che, per il carattere delle forze nucleari, sembra plausibile che il numero dei neutretti prodotti nelle interazioni fra nucleoni sia comparabile con quello dei mesoni carichi (e ciò è contenuto anche nel nostro schema),

---

(7) R. E. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **76**, 1736 (1949); A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI e G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **7**, 943 (1950); H. L. BRADT, M. F. KAPLON e B. PETERS: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 28 (1950); R. BJORKLUND, W. E. CRANDALL, B. J. MOYER e H. F. YORK: *Phys. Rev.*, **77**, 213 (1950); W. K. H. PANOFSKY, LEE AAMODT e H. F. YORK: *Phys. Rev.*, **78**, 825 (1950); A. G. CARLSON, J. E. HOOPER e D. T. KING: *Phil. Mag.*, **41**, 701 (1950).



risulta evidente che il processo in considerazione debba essere la sorgente principale della c.e. soprattutto ad elevate altezze.

Altri contributi importanti sono dati sicuramente dalla disintegrazione dei mesoni  $\mu$  e dall'urto diretto (knock-on) di questi con gli elettroni dell'aria. Al contrario si può ritenere, sia in base a considerazioni teoriche che all'evidenza sperimentale, che processi come il knock-on da protoni, la produzione diretta nelle stelle oppure nei processi d'urto fra nucleoni, l'assorbimento dei  $\pi^-$  da parte dei nucleoni secondo schemi del tipo di quello studiato teoricamente da BRUNO e MARSHAK, non forniscano alcun contributo apprezzabile e pertanto sono stati trascurati nei nostri calcoli.

## 2.2. - Disintegrazione dei neutretti.

Se si postula la emissione isotropa dei due fotoni nel sistema di riferimento del baricentro, con passaggio al sistema del laboratorio si ottiene il valore  $W_\pi/2$  per l'energia media di ciascun fotone,  $W_\pi$  essendo l'energia totale del neutretto. Ne deriva, per il numero di fotoni prodotti tra  $l$  ed  $l + dl$ , la seguente espressione

$$d_l \gamma(W, l) dW = 4 d_l g^0(2W, l) dW.$$

Nell'ipotesi che la disintegrazione segua immediatamente la creazione del  $\pi^0$ , si ottiene, in base alla (8) della Nota (I), il seguente spettro medio di formazione:

$$(5) \quad d_l \gamma(W, l) dW = P_0 \frac{5}{3} s \left( \frac{2W}{\varepsilon^*} \right)^{-s-1} \exp[-\alpha l] \frac{dW}{\varepsilon^*} dl.$$

Tutto ciò, naturalmente, vale per latitudini tali che risulti  $E_\eta \leq E_\pi$ ,  $E_\pi$  essendo la minima energia richiesta a un nucleone per la produzione di un mesone ( $E_\pi = \sim 2,5 \cdot 10^9$  eV). Evidentemente il minimo valore di  $W$  nello spettro fotonico di formazione è  $\varepsilon^* E_\pi/2$ , ove  $\varepsilon^*$  è la frazione di energia che il nucleone incidente cede al mesone prodotto. Come si vedrà più avanti <sup>(12)</sup> tale valore è di assai poco superiore a  $E_j$ , energia critica dell'aria ( $\sim 10^8$  eV). Questa osservazione ci permette di operare una forte semplificazione dei calcoli. Gli spettri elettronico e fotonico prodotti dai fotoni considerati a profondità maggiori di  $l$  si potranno ottenere:

a) sopra  $E_j$ , mediante le cosiddette soluzioni semplici della teoria della cascata, dal momento che la condizione iniziale è rappresentata da uno spettro di potenza <sup>(8)</sup>;

<sup>(8)</sup> B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

b) sotto  $E_j$ , facendo intervenire la sola degradazione per ionizzazione e trascurando qualunque altra causa d'assorbimento (approssimazione di ARLEY)<sup>(9)</sup>.

Il passaggio all'unità di radiazione per la misura della profondità  $t$  si effettua mediante la sostituzione  $l = at$ , con  $a$  dipendente dal valore scelto per la sezione d'urto nucleone-nucleone.

Alla quota  $t'$ , calcolata a partire da  $\bar{t}$ , avremo uno spettro fotonico  $\bar{\gamma}(W, t')$  e uno elettronico  $\bar{\pi}(E, t')$ , determinabili mediante le condizioni ai limiti:

$$(6) \quad \bar{\gamma}(W, 0) = A_0 \exp[-\alpha x \bar{t}] W^{-(s+1)}, \quad \bar{\pi}(E, 0) = 0.$$

Per valori dell'energia superiori a  $E_j$  le soluzioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(E, t') &= E^{-(s+1)} [a_1 \exp[\lambda_1(s)t'] + a_2 \exp[\lambda_2(s)t']], \\ \bar{\gamma}(W, t') &= W^{-(s+1)} \left[ \frac{a_1 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} \exp[\lambda_1(s)t'] + \frac{a_2 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)} \exp[\lambda_2(s)t'] \right], \end{aligned}$$

con le condizioni

$$a_1 + a_2 = 0, \quad \frac{a_1 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_1(s)} + \frac{a_2 C(s)}{\sigma_0 + \lambda_2(s)} = A_0 \exp[-\alpha x \bar{t}],$$

sufficienti a determinare le costanti  $a_1$  e  $a_2$ . Le funzioni  $C(s)$ ,  $\lambda_1(s)$ ,  $\lambda_2(s)$  e  $\sigma_0$  sono tabulate nel citato articolo di ROSSI e GREISEN.

Gli spettri differenziali  $\pi(E, t)$  e  $\gamma(W, t)$  alla profondità  $t$  generica ( $t' = t - \bar{t}$ ) si hanno ovviamente per integrazione:

$$\pi(E, t) = \int_0^t \bar{\pi}(E, t - \bar{t}) d\bar{t}, \quad \gamma(W, t) = \int_0^t \bar{\gamma}(W, t - \bar{t}) d\bar{t}.$$

Per energie inferiori ad  $E_j$  si ammette che la perdita di energia per ionizzazione subita dagli elettroni sia proporzionale al tratto percorso e che elettroni con tale energia non vengano prodotti direttamente. Tenendo presente che il percorso in cui si dissipa tutta l'energia  $E_j$  è per definizione l'unità di lunghezza caratteristica del processo della cascata, avremo che il tragitto compiuto dal momento in cui l'energia era  $E_j$  a quello in cui essa si è ridotta al valore  $E$  è:

$$\varrho = 1 - E/E_j.$$

Sarà quindi, per  $E < E_j$ ,  $\pi(E, t) = \pi(E_j, t - \varrho)$ .

(9) N. ARLEY: *Proc. Roy. Soc.*, A **168**, 519 (1938).



Per avere lo spettro integrale si deve integrare sull'energia:

$$H(E, t) = \int_E^{\infty} \pi(E', t) dE' \quad (\text{per } E > E_j),$$

$$H(E, t) = H(E_j, t) + \int_{E_j}^E \pi(E_j, t) dt \quad (\text{per } E < E_j).$$

Con facili integrazioni, si ha, per il caso più generale:

$$(7) \quad H(E, t) = \frac{B_0}{E_j^{s+1}} \left\{ \frac{E_j}{s} \left[ \frac{\exp[\lambda_1(s)t] - \exp[-a\alpha t]}{\lambda_1(s) + a\alpha} - \frac{\exp[\lambda_2(s)t] - \exp[-a\alpha t]}{\lambda_2(s) + a\alpha} \right] - \left[ \frac{\exp[\lambda_1(s)t]}{\lambda_1(s)t} \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda_1(s)\varrho]}{\lambda_1(s) + a\alpha} + \frac{\exp[-a\alpha t]}{a\alpha} \cdot \frac{1 - \exp[a\alpha\varrho]}{\lambda_1(s) + a\alpha} - \frac{\exp[\lambda_2(s)t]}{\lambda_2(s)} \cdot \frac{1 - \exp[-\lambda_2(s)\varrho]}{\lambda_2(s) + a\alpha} - \frac{\exp[-a\alpha t]}{a\alpha} \cdot \frac{1 - \exp[a\alpha\varrho]}{\lambda_2(s) + a\alpha} \right] \right\},$$

dove si è fatta la posizione seguente:

$$B_0 = A_0 \frac{[\sigma_0 + \lambda_1(s)][\sigma_0 + \lambda_2(s)]}{C(s) \cdot [\lambda_2(s) - \lambda_1(s)]}.$$

Per il momento ci limitiamo ad affermare che la (7) risolve il problema posto e si presta senz'altro al calcolo numerico.

### 2.3. - Elettroni derivanti dalla disintegrazione dei mesoni $\mu$ .

Nell'aria è lecito considerare i mesoni  $\mu$  negativi alla stessa stregua di quelli positivi. Ci riferiremo perciò sempre alla funzione  $g = g^+ + g^-$ .

Il numero dei mesoni che decadono tra  $\tau$  e  $\tau + d\tau$  è, secondo la (9) di Nota (I), il seguente:

$$d_i^- g(W, a\tau) dW = \frac{B}{\tau W} g(W, a\tau) dW d\tau,$$

dove per la costante  $B$  si è scelto il valore

$$B = \frac{\mu_0}{\tau_0 \gamma} = 1,31 \cdot 10^9 \text{ eV},$$

adottando le unità di ROSSI e GREISEN: cm, c, eV.

Recenti esperienze <sup>(10)</sup> permettono di asserire quasi con certezza che il

<sup>(10)</sup> E. P. HINKS e B. PONTECORVO: *Phys. Rev.*, **75**, 698 (1949); R. B. LEIGHTON, C. D. ANDERSON e A. J. SERIFF: *Phys. Rev.*, **75**, 1432 (1949); J. D. DAVIES, W. O. LÖCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **40**, 1250 (1950).

mesone  $\mu$  disintegrandosi dà origine a un elettrone ( $+$  o  $-$ ) e a due neutrini. Dagli spettri energetici degli elettroni di decadimento si ricava per l'energia media  $E'$  di questi, nel sistema di riferimento del mesone, un valore compreso fra 35 e 40 MeV: il valore più probabile è  $\sim 36$  MeV.

Si vede subito che l'energia media nel sistema del laboratorio vale

$$\bar{E} = 36W/\mu_0 = kW.$$

Si ha perciò il seguente spettro medio di formazione degli elettroni di decadimento:

$$\pi(E, \tau) dE d\tau = \frac{B}{E\tau} g\left(\frac{E}{k}, a\tau\right) dE d\tau.$$

Come nel numero precedente, si procede anzitutto a risolvere il problema della cascata, iniziata da questa sorgente elementare, per energie superiori a quella critica.

A tale scopo si definiscono le trasformate di Mellin degli spettri differenziali rispetto alla variabile energia:

$$M_\pi(s, t', \tau) = \int_0^\infty E^s \pi(E, t', \tau) dE, \quad M_\gamma(s, t', \tau) = \int_0^\infty W^s \gamma(W, t', \tau) dW,$$

per le quali si sa <sup>(8)</sup> che vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_\pi}{\partial t'} = -A(s)M_\pi + B(s)M_\gamma \\ \frac{\partial M_\gamma}{\partial t'} = C(s)M_\pi - \sigma_0 M_\gamma \end{cases}$$

le cui soluzioni, con le condizioni iniziali

$$M_{0\pi} = \int_0^\infty E^s \pi(E, \tau) dE, \quad M_{0\gamma} = 0,$$

sono:

$$M_\pi = \frac{M_{0\pi}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ [\sigma_0 + \lambda_1(s) \exp [\lambda_1(s)t'] - [\sigma_0 + \lambda_2(s)] \exp [\lambda_2(s)t'] \}$$

$$M_\gamma = \frac{C(s)M_{0\pi}}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \{ \exp [\lambda_1(s)t'] - \exp [\lambda_2(s)t'] \}.$$

Agli spettri si giunge per antitrasformazione di  $M_\pi$  e  $dM_\gamma$ . A tale scopo è utilizzabile il metodo del punto di sella. Infatti, per  $s \rightarrow 0$ ,  $\lambda_1(s) \rightarrow \infty$  onde anche  $M_\pi \rightarrow \infty$ .



Si sa inoltre che  $g(W, \tau)$ , e quindi anche  $\pi(E, \tau)$ , varia alle alte energie come uno spettro di potenza: ne segue che  $M_{0\pi}$ , e quindi  $M_{\pi}$ , diverge per  $s$  sufficientemente grande e finito. A questo pronunciato minimo lungo l'asse reale corrisponde un massimo lungo l'asse immaginario, entro la striscia di convergenza parallela a questo asse.

Trascurando al solito l'integrale dipendente da  $\lambda_2(s)$ , funzione sempre negativa e maggiore di  $\lambda_1(s)$  in valore assoluto, si perviene al seguente risultato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(E, t', \tau) dE = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H_1(s) M_{0\pi} E^{-(s+1)} \exp [\lambda_1(s)t']}{\left[ \lambda_1''(s)t' + \frac{M_{0\pi}'' M_{0\pi} - M_{0\pi}^{'2}}{M_{0\pi}^2} \right]^{1/2}} dE \\ t' = \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left( \lg E - \frac{M_{0\pi}'}{M_{0\pi}} \right) \end{array} \right.$$

In base a note proprietà della trasformata di Mellin si ha subito lo spettro integrale:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi(E, t', \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{H_1(s) M_{0\pi} \cdot E^{-s} \exp [\lambda_1(s)t']}{\left[ \lambda_1''(s)t' + \frac{1}{s^2} + \frac{M_{0\pi}'' M_{0\pi} - M_{0\pi}^{'2}}{M_{0\pi}^2} \right]^{1/2}} \\ t' = \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left( \lg E + \frac{1}{s} - \frac{M_{0\pi}'}{M_{0\pi}} \right) \end{array} \right.$$

Per avere lo spettro elettronico risultante a una profondità  $t$  qualsiasi si devono sommare i contributi di tutti gli strati infinitesimi  $d\tau$ :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(E, t) = \int_0^t \pi(E, t', \tau) d\tau = \int_0^t \pi(E, t - \tau, \tau) d\tau \\ \Pi(E, t) = \int_0^t \Pi(E, t - \tau, \tau) d\tau \end{array} \right.$$

Per la parte degli spettri sotto il valore  $E_j$  dell'energia si proceda come al n. 2.

#### 2.4. — Elettroni di Knock-on.

Sulla traccia dei precedenti calcoli si potrebbe valutare anche il contributo derivante alla c.e. dai mesoni  $\mu$  tramite il processo detto di knock-on.

(11) B. ROSSI e S. J. KLAPMAN: *Phys. Rev.*, **61**, 414 (1942); G. BERNARDINI, B. N. CACCIAPUOTI e B. QUERZOLI: *Nuovo Cimento*, **3**, 349 (1946); L. JANOSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1948), pag. 247.

Si prescinde del tutto dal contributo derivante dai protoni: infatti l'energia massima cedibile da questi agli elettroni è circa 1/100 di quella cedibile da mesoni della stessa energia. Per questi ultimi si ha:

$$E_{\max} = \frac{2m_e(W^2 - \mu_0^2)}{m_e^2 + \mu_0^2 + 2m_e W}.$$

Da questa formula risulta che anche il contributo dei mesoni lenti si può ritenere completamente trascurabile. Per i mesoni veloci non è il caso di eseguire materialmente i calcoli essendo già noto da precedenti lavori <sup>(11)</sup> il rapporto dell'intensità della componente elettronica di knock-on a quella di decadimento relativa allo stesso spettro generatore di mesoni.

## 2.5. - Valutazioni numeriche.

a) Nella formula (7) si può prescindere dalla seconda parentesi quadra, che da valutazioni numeriche risulta trascurabile. Si può quindi dire che l'assorbimento è governato dai coefficienti  $\lambda_1(s)$ , che per  $s = 1,8$  risulta uguale a  $-0,47$ , ed  $\alpha\alpha$  che per una sezione d'urto per la produzione dei mesoni di circa  $3 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup> e un coefficiente d'assorbimento della componente nucleonica di 125 g/cm<sup>2</sup>, risulta uguale a 0,345 <sup>(12)</sup>.

I risultati (curva a tratti) sono messi a confronto in fig. 3 con le misure di POMERANTZ <sup>(13)</sup> e con la curva di ROSSI <sup>(6)</sup>. Si noti che la profondità a cui la curva presenta il massimo è quella indicata dall'esperienza e che la sua posizione non dipende molto sensibilmente dai valori adottati per i parametri della teoria. L'intensità calcolata nella zona del massimo è già praticamente uguale a quella risultante dalle misure. Vi è però una discrepanza che aumenta verso le piccole altezze, come si era previsto, essendo qui importanti i contributi degli altri processi.

b) È facile rendersi conto del fatto che, per la particolare rappresentazione parametrica fornita in (8) e (9) dal metodo del punto di sella, i calcoli numerici sono effettuabili solo a patto che in  $M_{0\pi}$  si possa portare davanti

<sup>(12)</sup> Come è già stato accennato in Nota (I), il valore numerico del coefficiente  $\alpha$ , per un dato valore del coefficiente di assorbimento della componente nucleonica, dipende dal valore della sezione efficace  $\sigma$  per l'urto nucleone-nucleone. Così, avendo assunto per il coefficiente di assorbimento il valore di 125 g/cm<sup>2</sup>, si ha  $\alpha = 0,446$  (d'onde  $\varepsilon^* = 0,135$ ) in corrispondenza di  $\sigma = 2,95 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>. Nella Nota (III), essendosi assunto  $\sigma = 3,3 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>, risultava per lo stesso valore del coefficiente di assorbimento  $\alpha = 0,400$  ( $\varepsilon^* = 0,10$ ). Osserviamo comunque che una siffatta modifica porta a variazioni assai poco sensibili nella distribuzione delle diverse componenti della r.e. nell'atmosfera.

<sup>(13)</sup> M. A. POMERANTZ: *Phys. Rev.*, **75**, 69 (1949); **75**, 1721 (1949); **77**, 830 (1950).



al segno di integrale la dipendenza da  $\tau$ . Soddisfatta questa condizione, con l'ausilio delle tavole di ROSSI e GREISEN <sup>(8)</sup> i calcoli si possono facilmente condurre a termine. A tale scopo ci è convenuto utilizzare la separazione già effettuata tra mesoni veloci e mesoni lenti e introdurre una accettabile schematizzazione degli spettri differenziali mesonici, del cui calcolo si è parlato nel primo paragrafo.

La schematizzazione adottata, tenuto conto del diverso assorbimento dei due tipi di mesoni, è la seguente:

Per  $W > 3,3 \cdot 10^8$  eV

$$g(W, a\tau) = AW^{-r} \exp[-a\tau/\tau_1],$$

$$\left( \text{con } r = 1,8 \text{ }^{(14)}, \quad A = P_0 \cdot 10^{-18}/2 \quad \text{ed} \quad \frac{a}{\tau_1} = \frac{43}{410} \right);$$

per  $W < 3,3 \cdot 10^8$  eV

$$g(W, a\tau) = C \exp[-a\tau/\tau],$$

$$\left( \text{con } C = 2,4 \cdot 10^{-18} \cdot P_0 \quad \text{ed} \quad \frac{a}{\tau_2} = \frac{43}{200} \right).$$

I due casi vengono poi considerati separatamente e i contributi parziali alla c.e. sommati.

I CASO. - Con le posizioni fatte lo spettro differenziale di formazione assume la forma seguente:

$$\pi(E, \tau) dE d\tau = ABk^r E^{-(r+1)} \frac{\exp[-a\tau/\tau_1]}{\tau} dE d\tau \quad \text{per } E > k \cdot 3,3 \cdot 10^8 \text{ eV} = E_0$$

$$\pi(E, \tau) dE d\tau = 0, \quad \text{per } E < E_0$$

Per la trasformata  $M_{0\tau}$  si ottiene l'espressione

$$M_{0\tau} = ABk^r \frac{\exp[-a\tau/\tau_1]}{\tau} \cdot \frac{E_0^{s-r}}{r-s} \quad \text{con la condizione } R(s) < r.$$

<sup>(14)</sup> L'esponente 1,8 assunto in questa schematizzazione è una media dei valori che corrispondono agli spettri dei mesoni «veloci» alle diverse altezze. Il suo valore, apparentemente basso, deriva dal fatto che nei mesoni «veloci» (secondo la definizione data nel testo) si includono mesoni di energia maggiore o uguale a soli  $3,3 \cdot 10^8$  eV. La schematizzazione assunta rappresenta con sufficiente approssimazione la distribuzione spettrale dei mesoni fino a circa  $10^{10}$  eV, cioè per l'intervallo che maggiormente contribuisce alla produzione di elettroni. Per energie superiori lo spettro risulta, sia in base alla nostra teoria che all'esperienza, decrescere alquanto più rapidamente.

Con facili calcoli e sostituzioni si giunge poi all'espressione dello spettro integrale:

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi(E, t', \tau) &= \frac{ABk^*}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{H_1(s)E^{-s} \exp[\lambda_1(s)t']}{s \left[ \lambda_1''(s)t' + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(r-s)^2} \right]^{1/2}} \cdot \frac{E_0^{s-r}}{r-s} \cdot \frac{\exp[-a\tau/\tau_1]}{\tau} \\ t' &= \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left( \lg \frac{E}{E_0} + \frac{1}{s} - \frac{1}{r-s} \right). \end{aligned} \right.$$

Di qui, per integrazione su  $\tau$ , si ottiene  $\Pi(E, t)$ , tramite la sostituzione  $t' = t - \tau$ :

$$\Pi(E, t) = \int_{t_0}^t \Pi(E, t - \tau, \tau) d\tau,$$

ove  $t_0$  è scelto in modo da rendere accettabile l'ipotesi dell'assorbimento esponenziale. Questa limitazione ci vieta di calcolare il contributo del decadimento

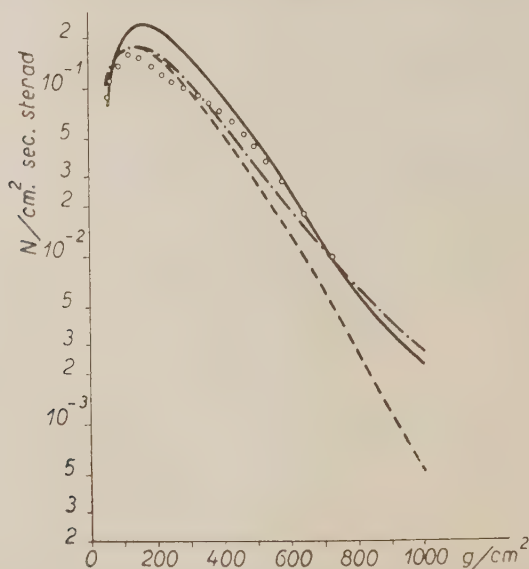


Fig. 3. - Distribuzione nell'atmosfera della componente elettronica.

- curva sperimentale (ROSSI)
- ooooo curva sperimentale (POMERANTZ)
- curva calcolata in base al solo contributo  
derivante dalla disintegrazione del neutretto
- .-.-.- curva teorica.



alla c.e. per le grandi altezze: ma la prima parte dei calcoli suggerisce che questo contributo comporterà soltanto una correzione assai piccola dei risultati relativi ai neutretti. Ciò è confermato a posteriori dalla estrapolazione, a profondità minori di  $t_0$ , della curva che si ottiene a profondità maggiori, dove di tale contributo si tiene conto.

Per  $E < E_j$  si ha ovviamente e con approssimazione accettabile:

$$H(E, t) = H(E_j, t) + \varrho \pi \left( E_j, t - \frac{\varrho}{2} \right).$$

## II CASO:

$$M_{0\pi} = \frac{BC}{\tau} \exp[-a\tau/\tau_2] \cdot \frac{E_0^2}{s} \quad (R(s) > 0)$$

$$\left( \begin{aligned} H(E, t', \tau) &= \frac{BC}{\sqrt{2\pi}} \frac{H_1(s) \cdot \exp[\lambda_1(s)t']}{s^2 \left[ \lambda_1'(s)t' + \frac{2}{s^2} \right]^{1/2}} \left( \frac{E_0}{E} \right)^2 \frac{\exp[-a\tau/\tau_2]}{\tau} \\ t' &= \frac{1}{\lambda_1'(s)} \left( \lg \frac{E}{E_0} + \frac{2}{s} \right). \end{aligned} \right.$$

Utilizzando le formule stabilite si sono eseguiti i calcoli relativi al contributo alla componente elettronica derivante dalla disintegrazione dei mesoni  $\mu$  e dal processo di knock-on.

Risulta fra l'altro che l'importanza dei mesoni lenti rispetto a quelli veloci, agli effetti del loro contributo alla c.e., è pressochè trascurabile.

La curva a punto e tratto di fig. 3 rappresenta la componente elettronica totale (inclusi cioè anche i contributi anzideitti) quale risulta dalla teoria sviluppata in questo lavoro. Come si vede dalla figura l'accordo fra i risultati dei nostri calcoli e quelli sperimentali (in particolar modo con quelli più recenti di POMERANTZ) si deve ritenere del tutto soddisfacente.

## Conclusioni.

Da quanto precede si può trarre con legittimità la conclusione che la presente teoria è in grado di descrivere il comportamento nell'atmosfera della componente molle della radiazione cosmica.

Unendo questi ai precedenti risultati <sup>(1)(2)(4)</sup> relativi alla componente nucleonica e a quella mesonica, si ha un quadro ampio e abbastanza soddisfacente della fenomenologia di questa radiazione nell'atmosfera.

Misure sull'effetto di latitudine della componente mesonica e, in particolare, sull'eccesso positivo dei mesoni a latitudini equatoriali, potranno avere

importanza fondamentale per saggiare la bontà dello schema da noi assunto come di qualsiasi altro che possa essere proposto allo stesso scopo.

In relazione anche a questa possibilità, abbiamo iniziato delle valutazioni numeriche sull'effetto di latitudine della componente mesonica (e in particolare del suo eccesso positivo) sempre nello spirito della presente teoria.

---

#### SUMMARY

Starting from the assumption of the existence at the limit of the atmosphere of a primary radiation consisting of protons having an integral energy spectrum proportional to  $E^{-s}$  and assuming a model for the «plural» creation of mesons suggested by one of us <sup>(1)</sup> in a preceding paper, a calculation is made on the distribution law in the atmosphere for slow mesons, fast mesons and electronic component. For this purpose the contribution of neutretto decay,  $\mu$ -meson decay and knock-on processes are considered. The results obtained, shown in Figures, are compared with experimental data.

## Sur la Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique (I). Spectres discontinus.

M. SCHÖNBERG

*Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles*

(ricevuto il 1<sup>o</sup> Febbraio 1951)

**Resumé** — Nous donnons des formes modifiées des développements de la théorie quantique des perturbations pour des problèmes stationnaires ou non stationnaires. Les formes modifiées du développement stationnaire de Schrödinger sont plus simples que le développement original. La forme modifiée du développement non stationnaire de Dirac ne contient pas des termes séculaires et elle se rattache étroitement à une des formes modifiées du développement de Schrödinger. Nos développements ne sont pas des séries de puissances d'un paramètre; ils peuvent être tous obtenus comme des séries de Liouville-Neumann. Tous ces développements contiennent les énergies perturbées, comme le développement de Brillouin et Wigner. La théorie des perturbations des opérateurs de densité et celle des perturbations des opérateurs dans la représentation de Heisenberg sont étudiées.

### Introduction.

1. — En mécanique quantique, il n'y a que très peu de problèmes dont on connaît la solution exacte. D'ailleurs, même lorsque la solution exacte est connue, il peut être avantageux d'employer une solution suffisamment approchée et plus simple que la solution exacte. De toutes les méthodes d'approximation, celles de perturbations ont une applicabilité plus étendue. L'idée basique des traitements de perturbations consiste en diviser les forces agissantes sur un système en deux groupes: un groupe contenant les forces les plus importantes et l'autre les forces d'importance plus petite, dont l'effet sera traité comme une petite modification des mouvements dus aux forces les plus importantes. Pour être appliquée, la méthode des perturbations requiert la connaissance des mouvements du système sous la seule action des forces les plus importantes.



Les méthodes de perturbation employées en mécanique quantique sont différentes pour les problèmes stationnaires et non stationnaires. Nous les appellerons méthodes stationnaires et dynamiques de perturbations. Les méthodes dynamiques peuvent être considérées comme les plus générales, puisqu'on peut, en principe, traiter les problèmes stationnaires par des méthodes non stationnaires. La méthode fondamentale de perturbations stationnaires est celle de SCHRÖDINGER <sup>(1)</sup>, qui se rattache aux méthodes introduites par lord RAYLEIGH dans la théorie classique des vibrations <sup>(2)</sup>. A la méthode de SCHRÖDINGER correspond celle de BORN, HEISENBERG, JORDAN <sup>(3)</sup>, en mécanique des matrices. La méthode dynamique fondamentale est celle de DIRAC <sup>(4)</sup>, dite de la variation des constantes. Toutes ces méthodes se basent essentiellement sur des développements en séries de puissance d'un paramètre, qui mesure l'importance de la perturbation, et qui est petit par rapport à 1. La méthode de Dirac peut aussi être considérée comme une méthode d'approximations successives, du type général de LIOUVILLE-NEUMANN. Les méthodes usuelles ne soulèvent pas des difficultés sérieuses dans les problèmes où interviennent des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, mais elles donnent lieu à des divergences en théorie des champs. Il n'est pas encore connu si les divergences, que l'on trouve en théorie des champs, sont dues à la méthode des perturbations employée, ou si elles indiquent que les équations de la théorie quantique des champs n'ont pas de solutions. Cependant, il semble assez probable que, dans le cas d'électrons et positrons interagissant avec un champ électromagnétique, c'est la méthode des perturbations qui introduit les divergences. Il y a des raisons sérieuses pour l'inapplicabilité des développements en séries de puissances dans la théorie des champs.

Plusieurs modifications des formules de la méthode de Schrödinger ont été proposées par LENNARD-JONES <sup>(5)</sup>, BRILLOUIN <sup>(6)</sup>, WIGNER <sup>(7)</sup> et FEENBERG <sup>(8)</sup>. Nous étudierons dans ce travail deux modifications du développement de Schrödinger, et de celui de Born, Heisenberg et Jordan, qui présentent certaines analogies avec quelques unes des modifications mentionnées. Nous séparerons les deux problèmes de la théorie des perturbations stationnaires: détermination des valeurs propres perturbées et développement des fonctions propres perturbées. Nos développements ne sont

<sup>(1)</sup> E. SCHRÖDINGER: *Ann. der Phys.*, **80**, 437 (1926).

<sup>(2)</sup> LORD RAYLEIGH: *The Theory of Sound*, vol. I (1894).

<sup>(3)</sup> M. BORN, W. HEISENBERG et P. JORDAN: *Zeits. f. Phys.*, **35**, 557 (1926).

<sup>(4)</sup> P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc., A* **112**, 673 (1926); *The Principles of Quantum Mechanics* (1947).

<sup>(5)</sup> J. E. LENNARD JONES: *Proc. Roy. Soc., A* **129**, 604 (1930).

<sup>(6)</sup> L. BRILLOUIN: *Journ. de Phys.*, **4**, 1 (1933).

<sup>(7)</sup> E. WIGNER: *Math. u. naturw. Anz. der ungar. Akad. d. Wiss.*, **53**, 477 (1935).

<sup>(8)</sup> E. FEENBERG: *Phys. Rev.*, **74**, 206 et 664 (1948).

pas des séries de puissances du paramètre de perturbation; ce sont des séries de Liouville-Neumann, contenant les valeurs propres perturbées. Des équations pour la détermination des valeurs propres perturbées sont données. Ces équations ne coïncident pas avec l'équation séculaire, considérée par LENNARD-JONES. D'ailleurs l'équation séculaire ne joue aucun rôle dans nos méthodes. Les développements des fonctions propres perturbées sont beaucoup plus simples que dans la méthode de Schrödinger, un d'eux ressemble à celui de Brillouin.

La méthode de la variation des constantes peut être considérée comme basée sur le développement de l'opérateur unitaire du mouvement perturbé, divisé (à gauche) par celui du mouvement non perturbé, en série de Peano. Cette façon de présenter la méthode de Dirac était déjà connue depuis longtemps et a été employée récemment en électrodynamique quantique par DYSON<sup>(9)</sup> et autres auteurs. Nous l'utilisons pour modifier la méthode de Dirac, en remplaçant l'opérateur unitaire du mouvement non perturbé par un autre opérateur unitaire. Cette modification remplace les énergies non perturbées par les énergies perturbées dans les exponentielles, qui décrivent la variation de la fonction d'onde perturbée avec le temps. Le développement de l'opérateur unitaire du mouvement perturbé, que nous trouvons, a des termes séculaires, mais les termes séculaires introduits par les approximations successives s'entre-détruisent, ce que permet d'obtenir un développement sans termes séculaires. Le développement sans termes séculaires est convenable pour des intervalles de temps considérables, et peut être utilisé de façon avantageuse pour la discussion des divergences en théorie quantique des champs, comme nous le montrerons ailleurs. Notre modification de la méthode de Dirac se base sur une décomposition de la hamiltonienne du système perturbé en deux parties, qui jouent un rôle semblable à celui de la hamiltonienne non perturbée et de la perturbation dans la méthode de Dirac. La même décomposition intervient aussi dans une des modifications de la méthode de Schrödinger et de celle de Born, Heisenberg et Jordan. La forme modifiée de la méthode dynamique des perturbations, que nous considérons, se rattache étroitement à une des formes que nous donnons à la méthode stationnaire: ce qui n'a pas lieu avec la méthode de Dirac et celle de Schrödinger, qui utilisent toutes les deux la décomposition de la hamiltonienne du système perturbé en hamiltonienne non perturbée et perturbation.

Dans cette partie du travail nous considérerons presque seulement des systèmes à hamiltonienne indépendante du temps et à spectre discret de valeurs propres. Le spectre de la hamiltonienne non perturbée est aussi supposé discret. Le cas de spectres continus ou mixtes et la théorie quantique de l'amortis-

---

(9) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 et 1736 (1949).

sement (damping) seront examinés dans une partie suivante de ce travail.

Récemment, KATO <sup>(10)</sup> a appliqué les développements de Liouville et Neumann à la théorie des perturbations et il a montré que les développements stationnaires usuels, en séries de puissances de la perturbation, peuvent souvent être utilisés, lorsqu'ils divergent, comme séries asymptotiques. Nous n'étudierons pas la convergence de nos développements dans ce travail.

## PREMIÈRE PARTIE

### MÉTHODES STATIONNAIRES DE PERTURBATIONS

2. — Nous considérerons des systèmes dynamiques dont la hamiltonienne  $H$  est un polynôme ou série de puissances d'un petit paramètre réel  $\lambda$

$$(1) \quad H = H_0 + H_p, \quad H_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n H_n;$$

$H_0$  est la hamiltonienne non perturbée et  $H_p$  la perturbation. Nous supposons que les fonctions propres de  $H_0$ , et les valeurs propres correspondantes, sont connues. Nous admettrons que les spectres de  $H$  et de  $H_0$  sont discontinus, et nous choisirons les fonctions propres comme systèmes orthonormaux. Les fonctions propres de  $H$  seront représentées par des  $\Phi$  et les valeurs propres par des  $E$

$$(2) \quad H\Phi_l = E_l\Phi_l, \quad (\Phi_l, \Phi_{l'}) = \delta_{ll'}.$$

Les valeurs propres de  $H_0$  seront représentées par des  $E^{(0)}$ , et les fonctions propres par des  $\Phi^{(0)}$ :

$$(3) \quad H_0\Phi_l^{(0)} = E_l^{(0)}\Phi_l^{(0)}, \quad (\Phi_l^{(0)}, \Phi_{l'}^{(0)}) = \delta_{ll'}.$$

Nous admettrons que

$$(4) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi_l = \Phi_l^{(0)}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} E_l = E_l^{(0)}.$$

Nous décomposerons  $H$  en deux parties,  $J$  et  $I$ ;  $J$  ayant comme fonctions propres les  $\Phi_l^{(0)}$  avec les valeurs propres  $E_l$

$$(5) \quad H = J + I, \quad J\Phi_l^{(0)} = E_l\Phi_l^{(0)}.$$

---

(10) T. KATO: *Prog. Theor. Phys.*, **4**, 514 (1949); **5**, 95 et 207 (1950).



Les opérateurs de projection attachés aux  $\Phi_i$  et  $\Phi_i^{(0)}$  seront représentés par  $P_i$  et  $P_i^{(0)}$ . Les décompositions spectrales de  $H$ ,  $H_0$  et  $J$  sont

$$(6) \quad H = \sum_i E_i P_i, \quad H_0 = \sum_i E_i^{(0)} P_i^{(0)}, \quad J = \sum_i E_i P_i^{(0)}.$$

Lorsqu'il y a des valeurs propres dégénérées<sup>(11)</sup>, les fonctions propres seront représentées par des  $\Phi_{i,\alpha}$  ou  $\Phi_{i,\alpha}^{(0)}$ . Dans ce cas, il est avantageux de considérer les opérateurs de projection  $P_{E_i}$ ,  $P_{E_i^{(0)}}$  et  $P_{E_i}^{(0)}$ :

$$(7) \quad P_{E_i} = \sum_\alpha P_{E_{i,\alpha}}, \quad P_{E_i^{(0)}} = \sum_{\beta} P_{E_{i,\beta}^{(0)}}, \quad P_{E_i}^{(0)} = \sum_\alpha P_{E_{i,\alpha}}^{(0)}.$$

Nous avons les décompositions suivantes

$$(8) \quad H = \sum_E E_i P_{E_i}, \quad H_0 = \sum_{E^{(0)}} E_k^{(0)} P_{E_k^{(0)}}, \quad J = \sum_E E_i P_{E_i}^{(0)}.$$

Dans ce travail nous employerons souvent le développement de l'opérateur  $(1 - A)^{-1}$  en série de Liouville-Neumann

$$(9) \quad (1 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Ces développements de Liouville-Neumann sont bien connus de la théorie des équations intégrales linéaires, où ils donnent la solution, lorsqu'elle peut être obtenue par la méthode des approximations successives. Nous remplacerons les développements en séries de puissances de  $\lambda$ , de la théorie ordinaire des perturbations, par des séries de Liouville-Neumann.

Dans la méthode de Schrödinger, on cherche des développements de la forme

$$(10) \quad \Phi_i = \Phi_i^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \omega_i^{(n)}, \quad E_i = E_i^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_i^{(n)}.$$

Dans la méthode de Born, Heisenberg et Jordan, on cherche une matrice unitaire ( $U$ ) telle que

$$(11) \quad (U)^{-1}(H)(U) = (E), \quad (U)^+ = (U)^{-1},$$

les matrices étant prises dans la représentation de  $H_0$ , avec  $(E)$  diagonale; et l'on développe ( $U$ ) en série de puissances de  $\lambda$

$$(12) \quad (U) = (1) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (\Omega_n)$$

<sup>(11)</sup> Lorsque le niveau perturbé  $E_i$  est dégénéré, nous admettrons que les fonctions propres  $\Phi_{i,\alpha}$  correspondent à des fonctions propres non perturbées du même niveau  $E_i^{(0)}$ . Nous ne considérerons que des cas où la perturbation diminue, ou ne change pas, la dégénérescence des niveaux non perturbés.

ainsi que (E). Nous partirons aussi d'une équation équivalente à (11), sans employer les matrices

$$(13) \quad HS = SJ.$$

Les solutions unitaires de (13) seront représentées par des  $U$ . Sous cette forme la relation entre les deux points de vue dévient évidente, puisque les  $S$  transforment les  $\Phi_i^{(0)}$  en fonctions propres de  $H$

$$(14) \quad H(S\Phi_i^{(0)}) = SJ\Phi_i^{(0)} = E_i(S\Phi_i^{(0)}).$$

Les  $U$  nous donnent des fonctions propres orthonormées de  $H$

$$(15) \quad (U\Phi_i^{(0)}, U\Phi_j^{(0)}) = (U^+U\Phi_i^{(0)}, \Phi_j^{(0)}) = \delta_{ij},$$

parce que

$$(16) \quad U^+ = U^{-1}.$$

### Deux modifications de la methode stationnaire de perturbations.

3. — Nous donnerons deux formes différentes de la solution de l'équation fondamentale (13). Ainsi nous obtiendrons deux modifications de la méthode stationnaire usuelle. Il résulte de (13) que

$$(17) \quad HSP_{E_i}^{(0)} = E_iSP_{E_i}^{(0)}, \quad (J - E_i)SP_{E_i}^{(0)} = -ISP_{E_i}^{(0)}.$$

Nous introduirons maintenant l'opérateur  $K_{E_i}$

$$(18) \quad K_{E_i} = \sum_{E_{i'} \neq E_i} (E_i - E_{i'})^{-1} P_{E_{i'}}^{(0)}.$$

Il résulte de (18) et de la troisième équation (6) que

$$(19) \quad K_{E_i}(J - E_i) = - \sum_{E_{i'} \neq E_i} P_{E_{i'}}^{(0)} = -1 + P_{E_i}^{(0)},$$

puisque

$$(20) \quad \sum_{E_i} P_{E_i}^{(0)} = 1.$$

En combinant (17) et (19), nous obtenons

$$(21) \quad SP_{E_i}^{(0)} = P_{E_i}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)} + K_{E_i}ISP_{E_i}^{(0)},$$

donc

$$(22) \quad SP_{E_i}^{(0)} = (1 - K_{E_i}I)^{-1}P_{E_i}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{E_i}I)^n P_{E_i}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)},$$

lorque  $(1 - K_{E_l} I)^{-1}$  peut être développé en série de Liouville-Neumann. Nous avons, d'une façon générale, une solution formelle de (13)

$$(23) \quad S = \sum_{E_l} (1 - K_{E_l} I)^{-1} P_{E_l}^{(0)} S P_{E_l}^{(0)},$$

et lorsque les  $(1 - K_{E_l} I)^{-1}$  sont développables en série de Liouville-Neumann

$$(24) \quad S = \sum_{E_l} \sum_{n=0}^{\infty} (K_{E_l} I)^n P_{E_l}^{(0)} S P_{E_l}^{(0)}.$$

Lorsque les valeurs propres de  $H$  et de  $H_0$  ne sont pas dégénérées, nous pouvons simplifier les formules précédentes et considérer les opérateurs  $S P_l^{(0)}$

$$(25) \quad S P_l^{(0)} = (1 - K_l I)^{-1} P_l^{(0)} S P_l^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (K_l I)^n P_l^{(0)} S P_l^{(0)},$$

avec

$$(26) \quad K_l = \sum_{\nu \neq l} (E_l - E_{\nu})^{-1} P_{\nu}^{(0)}.$$

Dans ce cas, les fonctions propres non perturbées sont

$$(27) \quad \chi_l = S \Phi_l^{(0)} = S P_l^{(0)} \Phi_l^{(0)} = c_l \sum_{\tau=0}^{\infty} (K_l I)^{\tau} \Phi_l^{(0)}.$$

Les  $c_l$  sont des constantes de normalisation

$$(28) \quad c_l \Phi_l^{(0)} = P_l^{(0)} S P_l^{(0)} \Phi_l^{(0)} = P_l^{(0)} \chi_l = (\Phi_l^{(0)}, \chi_l) \Phi_l^{(0)},$$

$$(29) \quad c_l = (\Phi_l^{(0)}, \chi_l).$$

Pour donner une forme plus explicite au développement (27), nous introduirons les opérateurs dyadiques  $P_{\nu', \nu}^{(0)}$ , définis par l'équation

$$(30) \quad P_{\nu', \nu}^{(0)} \chi = \Phi_{\nu'}^{(0)} (\Phi_{\nu}^{(0)}, \chi),$$

qui nous donne les identités suivantes

$$(31) \quad \begin{cases} P_{l, l}^{(0)} = P_l^{(0)}, & P_{\nu', l}^{(0)} P_{l, \nu}^{(0)} = \delta_{\nu' \nu} P_{\nu', \nu}^{(0)}, \\ P_l^{(0)} A P_{\nu}^{(0)} = \Phi_l^{(0)}, A \Phi_{\nu}^{(0)} P_{\nu', \nu}^{(0)} = \langle l | A | \nu \rangle P_{\nu', \nu}^{(0)}, \end{cases}$$

$\chi$  étant une fonction quelconque, et  $A$  un opérateur quelconque. La troisième formule (31) nous donne

$$(32) \quad A = \left( \sum_l P_l^{(0)} \right) A \left( \sum_{\nu} P_{\nu}^{(0)} \right) = \sum_{l', l''} \langle l' | A | l'' \rangle P_{\nu', \nu}^{(0)},$$



donc

$$(33) \quad (K_l I)^n = \prod_{r=1}^n \sum_{l'_r, l''_r} \langle l'_r | K_l I | l''_r \rangle P_{l'_r, l''_r}^{(0)} \prod_{r=1}^n \sum_{l'_r \neq l} \sum_{l''_r} \frac{\langle l'_r | I | l''_r \rangle}{E_l - E_{l'_r}} P_{l'_r, l''_r}^{(0)} \\ = \sum_{k \neq l} \sum_{l'_n} \frac{\langle k_1^{(n)} | I | l_2^{(n)} \rangle \langle k_2^{(n)} | I | l_3^{(n)} \rangle \dots \langle k_n^{(n)} | I | l'_n \rangle}{(E_l - E_{k_1^{(n)}})(E_l - E_{k_2^{(n)}}) \dots (E_l - E_{k_n^{(n)}})} P_{k_1^{(n)}, l'_n}^{(0)}.$$

Le développement de  $\chi_l$  est donc

$$(34) \quad \chi_l = c_l \left[ \Phi_l^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k^{(n)} \neq l} \frac{\Phi_{k_1^{(n)}}^{(0)} \langle k_1^{(n)} | I | k_2^{(n)} \rangle \dots \langle k_n^{(n)} | I | l \rangle}{(E_l - E_{k_1^{(n)}}) \dots (E_l - E_{k_n^{(n)}})} \right].$$

Ce développement est beaucoup plus simple que celui donné par la méthode de Schrödinger, mais pour l'appliquer, il faut connaître les valeurs propres perturbées, qui apparaissent aux dénominateurs et aussi dans les éléments de matrice de  $I$

$$(35) \quad \langle l' | I | l'' \rangle = \langle l' | H_p | l'' \rangle + (E_l^{(0)} - E_{l'}) \delta_{l'l''}.$$

Pour déterminer les  $E$ , nous avons les équations suivantes

$$(36) \quad \langle l | I S | l \rangle = 0,$$

qui résultent immédiatement de la deuxième équation (17)

$$(37) \quad E_l = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l | I (K_l I)^n | l \rangle.$$

Ces équations peuvent être traitées par la méthode des approximations successives. Nous pouvons partir de la valeur usuelle de première approximation  $E^{(1)}$

$$(38) \quad E_l^{(1)} = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle,$$

et prendre dans les approximations plus élevées

$$(39) \quad E_l^{(s+1)} = E_l^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l | H_p (K_l I)^n | l \rangle_{(E=E^{(s)})}.$$

Dans la méthode de LENNARD-JONES <sup>(5)</sup> on part aussi d'une équation exacte

$$(40) \quad \text{Det} (H - J) = 0,$$

le déterminant étant pris avec les matrices dans la représentation de  $H_0$ , et l'on déduit de (40) des équations approchées. Ainsi, LENNARD-JONES prend, en seconde approximation, les équations

$$(41) \quad E_l^{(2)} = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{k \neq l} \frac{\langle l | H_p | k \rangle \langle k | H_p | l \rangle}{E_l^{(2)} - E_k^{(0)}},$$

que l'on traite par la méthode des approximations successives. On pourrait aussi déduire de (37) des équations approchées, comme dans la méthode de Lennard-Jones.

Le développement (34) et les équations (37) ressemblent à ceux de la méthode de Brillouin (\*), mais ne coïncident pas avec eux.

4. — Nous allons maintenant résoudre l'équation (13) par une autre méthode. La première équation (17) nous donne

$$(42) \quad (H_0 - E_i^{(0)})SP_{E_i}^{(0)} = -(H_p - \Delta E_i)SP_{E_i}^{(0)};$$

$$(42a) \quad \Delta E_i = E_i - E_i^{(0)}.$$

Nous admettons que les états perturbés de même énergie  $E_i$  correspondent à des états perturbés ayant tous la même énergie  $E_i^{(0)}$ , comme nous l'avons fait auparavant, et nous introduirons les opérateurs  $K_{E_i^{(0)}}^{(0)}$

$$(43) \quad K_{E_i^{(0)}}^{(0)} = \sum_{E_i^{(0)} \neq E_i^{(0)}} (E_i^{(0)} - E_i^{(0)})^{-1} P_{E_i^{(0)}}^{(0)}.$$

Il y a une relation analogue à (19)

$$(44) \quad K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_0 - E_i^{(0)}) = -1 + P_{E_i^{(0)}}^{(0)},$$

qui nous donne

$$(45) \quad SP_{E_i}^{(0)} = P_{E_i^{(0)}}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)} + K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_i)SP_{E_i}^{(0)},$$

donc

$$(46) \quad SP_{E_i}^{(0)} = [1 - K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_i)]^{-1} P_{E_i^{(0)}}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)},$$

et

$$(47) \quad S = \sum_{E_i} [1 - K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_i)]^{-1} P_{E_i^{(0)}}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)}.$$

Lorsqu'on peut développer les opérateurs  $[1 - K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_i)]^{-1}$  en série de Liouville-Neumann, nous avons

$$(48) \quad S = \sum_{E_i} \sum_{n=0}^{\infty} [K_{E_i^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_i)]^n P_{E_i^{(0)}}^{(0)}SP_{E_i}^{(0)}.$$

Dans le cas où il n'y a pas des niveaux non perturbés dégénérés, nous pouvons remplacer les  $K_{E_i^{(0)}}^{(0)}$  par les  $K_i^{(0)}$ , et nous avons

$$(49) \quad \chi_i = S\Phi_i^{(0)} = c_i \sum_{n=0}^{\infty} K_i^{(0)}(H_p - \Delta E_i)^n \Phi_i^{(0)},$$

$$(50) \quad K_l^{(0)} = \sum_{l' \neq l} (E_l^{(0)} - E_{l'}^{(0)})^{-1} P_{l'}^{(0)}.$$

Il y a une formule analogue à (33)

$$(51) \quad [K_l^{(0)}(H_p - \Delta E_l)]^n = \sum_{k \neq l} \sum_{l'} \frac{k_1^{(n)} H_p - \Delta E_l | k_2^{(n)} H_p - \Delta E_l | k_3^{(n)} \dots | k_n^{(n)} H_p - \Delta E_l | l' \rangle}{(E_l^{(0)} - E_{k_1^{(n)}}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{k_2^{(n)}}^{(0)}) \dots (E_l^{(0)} - E_{k_n^{(n)}}^{(0)})} P_{k_1^{(n)}, l'}^{(0)},$$

donc

$$(52) \quad Z_l = c_l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k^{(n)} \neq l} \Phi_{k_l^{(n)}}^{(0)} \frac{\langle k_1^{(n)} | H_p - \Delta E_l | k_2^{(n)} \rangle \dots \langle k_n^{(n)} | H_p - \Delta E_l | l \rangle}{(E_l^{(0)} - E_{k_1^{(n)}}^{(0)}) \dots (E_l^{(0)} - E_{k_n^{(n)}}^{(0)})}.$$

Les valeurs propres  $E$  n'interviennent qu'aux numérateurs, en (52). Nous obtenons de (42) des équations pour les  $E$

$$(53) \quad \langle l | (H_p - \Delta E_l) S | l \rangle = 0,$$

qui nous donnent

$$(54) \quad E_l = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{k \neq l} \frac{|\langle l | H_p | k \rangle|^2}{(E_l^{(0)} - E_k^{(0)})} + \sum_{n=2}^{\infty} \langle l | H_p [K_l^{(0)}(H_p - \Delta E_l)]^n | l \rangle.$$

Ces équations sont beaucoup plus simples que les équations (37), et chacune d'elles ne contient qu'une seule des valeurs propres perturbées  $E$ . Nous pouvons obtenir de (54) des équations approchées pour les  $E$ . Nous prendrons les équations suivantes

$$(55) \quad E_l^{(s)} = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{n=1}^{s-1} \langle l | H_p [K_l^{(0)}(H_p - \Delta E_l^{(s)})]^n | l \rangle.$$

Pour  $s=1,2$  on retrouve les formules usuelles. Pour  $s>2$  on doit résoudre une équation d'ordre  $s-2$ . Pour  $s=3$  on trouve

$$(56) \quad E_l^{(3)} = E_l^{(0)} + \left| 1 + \sum_{k \neq l} \frac{|\langle l | H_p | k \rangle|^2}{(E_l^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \right|^{-1} \times \left| \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{k \neq l} \frac{|\langle l | H_p | k \rangle|^2}{(E_l^{(0)} - E_k^{(0)})^2} + \sum_{k \neq l} \frac{\langle l | H_p | k_1 \rangle \langle k_1 | H_p | k_2 \rangle \langle k_2 | H_p | l \rangle}{(E_l^{(0)} - E_{k_1}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{k_2}^{(0)})} \right|.$$

En général, il n'y a pas d'intérêt d'aller à des approximations plus élevées.

5. - L'équation (13) admet une infinité de solutions. Etant donnée une solution  $S$ , on peut en obtenir une infinité d'autres en la multipliant à droite par un opérateur  $A$  commutable avec  $J$

$$(57) \quad HS' = S'J, \quad S' = SA, \quad [A, J] = 0.$$



Lorsque  $S$  admet un inverse  $S^{-1}$ , les  $S'$  sont toutes les solutions de (13). En effet, soit  $S''$  une solution de (13), nous avons

$$(58) \quad (S^{-1}S'')J = S^{-1}HS'' = J(S^{-1}S'').$$

$S^{-1}$ ,  $S''$  commutant avec  $J$ ,  $S''$  est un  $S'$ . Nous appellerons partie diagonale  $B_a$  d'un opérateur  $B$ , quelconque, l'opérateur suivant

$$(59) \quad B_a = \sum_{E_l} P_{E_l}^{(0)} B P_{E_l}^{(0)}, \quad [B_a, J] = 0.$$

En tenant compte de l'identité

$$(60) \quad P_{E_l}^{(0)} B P_{E_l}^{(0)} = P_{E_l}^{(0)} B_a,$$

nous obtenons de (24)

$$(61) \quad S = \left[ \sum_{E_l} (1 - K_{E_l} I)^{-1} P_{E_l}^{(0)} \right] S_a.$$

Cette équation montre qu'un opérateur  $S$  est déterminé par sa partie diagonale  $S_a$ . Il résulte de (47), lorsque  $P_{E_l}^{(0)} = P_{E_l^{(0)}}^{(0)}$ , que

$$(62) \quad S = \left\{ \sum_{E_l^{(0)}} [1 - K_{E_l^{(0)}}^{(0)} (H_p - \lambda E_l)]^{-1} P_{E_l^{(0)}}^{(0)} \right\} S_a.$$

Nous représenterons par  $S_1$  la solution de (13) dont la partie diagonale est 1

$$(63) \quad S_1 = \sum_{E_l} (1 - K_{E_l} I)^{-1} P_{E_l}^{(0)}.$$

Nous démontrerons maintenant que  $S_1$  est unitaire

$$(64) \quad S_1^{-1} = S_1^+.$$

Pour cela, nous établirons d'abord que

$$(65) \quad B = B_a + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau) \exp[iJ\tau] [B, J] \exp[-iJ\tau] d\tau, \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau = 0 \\ -1 & \tau < 0 \end{cases}.$$

En tenant compte de la décomposition spectrale de l'opérateur  $\exp[iJ\tau]$

$$(66) \quad \exp[iJ\tau] = \sum_{E_l} \exp[iE_l\tau] P_{E_l}^{(0)},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau) \exp [iJ\tau] [B, J] \exp [-iJ\tau] d\tau = \\
 & = \frac{i}{2} \sum_{E_l} \sum_{E_{l'} \neq E_l} P_{E_l}^{(0)} B P_{E_{l'}}^{(0)} (E_{l'} - E_l) \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau) \exp [i(E_l - E_{l'})\tau] d\tau = \\
 & = \sum_{E_l} \sum_{E_{l'}} P_{E_l}^{(0)} B P_{E_{l'}}^{(0)} - \sum_{E_l} P_{E_l}^{(0)} B P_{E_l}^{(0)} = B - B_a.
 \end{aligned}$$

De la même manière, on vérifie que

$$(68) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iJ\tau] [B, J] \exp [-iJ\tau] d\tau = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
 (69) \quad B &= B_a - i \int_{-\infty}^0 \exp [iJ\tau] [B, J] \exp [-iJ\tau] d\tau = \\
 &= B_a + i \int_0^{\infty} \exp [iJ\tau] [B, J] \exp [-iJ\tau] d\tau.
 \end{aligned}$$

Pour les opérateurs  $S$

$$(70) \quad [S, J] = IS,$$

donc

$$(71) \quad S = S_a + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau) \varrho \exp [iJ\tau] IS \exp [-iJ\tau] d\tau.$$

$$\begin{aligned}
 (72) \quad S &= S_a - i \int_{-\infty}^0 \exp [iJ\tau] IS \exp [-iJ\tau] d\tau = \\
 &= S_a + i \int_0^{\infty} \exp [iJ\tau] IS \exp [-iJ\tau] d\tau,
 \end{aligned}$$

en particulier

$$(73) \quad S_1 = 1 - i \int_{-\infty}^0 \exp [iJ\tau] IS_1 \exp [-iJ\tau] d\tau.$$

Introduisons les opérateurs  $S'_1(t)$  et  $I'(t)$

$$(74) \quad S'_1(t) = \exp [iJt] S_1 \exp [-iJt], \quad I'(t) = \exp [iJt] I \exp [-iJt].$$

Il résulte de (73) que

$$(75) \quad S_1'(t) = 1 - i \int_{-\infty}^t I'(\tau) S_1'(\tau) d\tau,$$

donc  $S_1'(t)$  est définie par les équations

$$(76) \quad i \frac{d}{dt} S_1'(t) = I'(t) S_1'(t), \quad S_1'(-\infty) = 1.$$

Puisque  $I'(t)$  est hermitique,  $S_1'(t)$  est unitaire et  $S_1 = S_1'(0)$  aussi.

Nous avons trouvé une solution unitaire de (13). Toutes les autres solutions unitaires de (13) sont de la forme  $S_1 \Omega$ ,  $\Omega$  étant un opérateur unitaire quelconque commutable avec  $J$ . Lorsque  $\lambda = 0$ ,  $J$  coïncide avec  $H_0$  et  $I$  s'annule. Nous pouvons, donc, prendre toujours

$$(77) \quad \Phi_{l,a} = S_1 \Phi_{l,a}^{(0)} = (1 - K_{E_l} I)^{-1} \Phi_{l,a}^{(0)}.$$

L'équation intégrale (71) peut être obtenue directement de (21), au moyen de l'expression suivant de  $K_{E_l}$

$$(78) \quad K_{E_l} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(J - E_l)\tau] \varepsilon(\tau) d\tau,$$

que l'on vérifie facilement, en tenant compte de (66). Il est intéressant de remarquer que

$$(79) \quad \begin{cases} K_{E_l} = K(E_l) \\ K(E) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(J - E)\tau] \varepsilon(\tau) d\tau \\ K(E) = (E - J)^{-1}, \quad E \neq E_l \quad (l = 1, 2, 3 \dots). \end{cases}$$

### Introduction des hyperopérateurs.

6. — Plusieurs problèmes de la théorie des perturbations peuvent être traités d'une façon très claire au moyen de transformations linéaires effectuées sur des opérateurs. Nous appellerons hyperopérateur linéaire l'être mathématique qui indique une transformation linéaire d'opérateurs. Un hyperopérateur linéaire  $\mathcal{A}$ , appliqué à une combinaison linéaire d'opérateurs, la transforme dans la même combinaison linéaire des opérateurs transformés

$$(80) \quad \mathcal{A} \cdot \sum_l a_l B_l = \sum_l a_l \mathcal{A} \cdot B_l.$$



Nous appellerons éléments de matrice de  $\mathcal{A}$  les nombres  $\langle l, l' | \mathcal{A} | k, k' \rangle$

$$(81) \quad \langle l, l' | \mathcal{A} | k, k' \rangle = \langle l | \mathcal{A} \cdot P_{kk'}^{(0)} | l' \rangle,$$

$$(82) \quad \langle l | \mathcal{A} \cdot B | l' \rangle = \sum_{k, k'} \langle l, l' | \mathcal{A} | k, k' \rangle \langle k | B | k' \rangle.$$

La somme et le produit des hyperopérateurs se définissent de la façon usuelle

$$(83) \quad (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cdot C = \mathcal{A} \cdot C + \mathcal{B} \cdot C, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B}) \cdot C = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot C).$$

Nous avons

$$(84) \quad \begin{cases} \langle l, l' | \mathcal{A} + \mathcal{B} | k, k' \rangle = \langle l, l' | \mathcal{A} | k, k' \rangle + \langle l, l' | \mathcal{B} | k, k' \rangle \\ \langle l, l' | \mathcal{A}\mathcal{B} | k, k' \rangle = \sum_{j, j'} \langle l, l' | \mathcal{A} | j, j' \rangle \langle j, j' | \mathcal{B} | k, k' \rangle. \end{cases}$$

On définit de la façon usuelle le hyperopérateur unité

$$(85) \quad 1 \cdot B = B,$$

et l'inverse d'un hyperopérateur  $\mathcal{A}^{-1}$

$$(86) \quad \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = 1.$$

L'adjoint  $\mathcal{A}^+$  de  $\mathcal{A}$  est défini par la condition

$$(87) \quad \text{Spur } [B(\mathcal{A} \cdot C)] = \{ \text{Spur } [(\mathcal{A}^+ \cdot B^+)C^+] \}^*.$$

Nous avons

$$(88) \quad \langle l, l' | \mathcal{A}^+ | k, k' \rangle = \langle k, k' | \mathcal{A} | l, l' \rangle^*.$$

Les hyperopérateurs unitaires et hermitiques,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{H}$  sont définis comme d'habitude

$$(89) \quad \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^+, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^+.$$

Les fonctions entières d'un hyperopérateur peuvent être définies comme dans le cas des opérateurs. Un type important de hyperopérateur unitaire est celui des exponentielles  $\mathcal{U}(t)$

$$(90) \quad \mathcal{U}(t) = \exp [i\mathcal{A}t], \quad (\mathcal{A} = \mathcal{A}^+, t = t^*).$$

A chaque opérateur  $A$  correspond un hyperopérateur transformateur  $\mathcal{T}_A$

$$(91) \quad \mathcal{T}_A \cdot B = A^+ B A.$$

On vérifie facilement que

$$(92) \quad \mathcal{T}_{A^+} = \mathcal{T}_A^+, \quad \mathcal{T}_{A^{-1}} = \mathcal{T}_A^{-1}.$$

Les transformateurs qui correspondent à des opérateurs hermitiques et unitaires sont aussi hermitiques et unitaires, respectivement. Aux transformateurs se

rattachent les commutateurs  $\mathcal{C}_F$

$$(93) \quad \mathcal{C}_F \cdot A = [A, F], \quad \langle l, l' | \mathcal{C}_F | k, k' \rangle = \delta_{lk} \langle k' | F | l' \rangle - \delta_{l'k'} \langle l | F | k \rangle.$$

Le commutateur  $\mathcal{C}_F$  est hermitique lorsque  $F^+ = F$ .

Les hyperopérateurs dyadiques  $\mathcal{D}_{AA'}$  sont définis par analogie avec les opérateurs dyadiques

$$(94) \quad \mathcal{D}_{AA'} \cdot B = A \text{ Spur } (A'^+ B).$$

Les projecteurs sont un cas particulier des dyadiques

$$(95) \quad \mathcal{P}_A = \mathcal{D}_{AA}, \quad \text{Spur } (A^+ A) = 1.$$

Nous avons

$$(96) \quad \mathcal{P}_A^+ = \mathcal{P}_A, \quad \mathcal{P}_A^2 = \mathcal{P}_A, \quad \mathcal{P}_A \cdot A = A.$$

Tous les hyperopérateurs peuvent être décomposés en dyadiques

$$(97) \quad \mathcal{A} = \sum_{l, l'} \sum_{k, k'} \langle l, l' | \mathcal{A} | k, k' \rangle \mathcal{D}_{P_{ll'}^{(0)}, P_{kk'}^{(0)}}.$$

Pour certains types de hyperopérateurs on a une décomposition spectrale

$$(98) \quad \mathcal{A} = \sum_a a \mathcal{P}_{A_a}.$$

Lorsque les opérateurs  $A_a$  sont orthogonaux, et leurs projecteurs forment un système complet

$$(99) \quad \text{Spur } (A_a^+ A_{a'}) = \delta_{aa'}, \quad \sum_a \mathcal{P}_{A_a} = 1,$$

on peut définir les fonctions de  $\mathcal{A}$ , au moyen de la décomposition spectrale

$$(100) \quad f(\mathcal{A}) = \sum_a f(a) \mathcal{P}_{A_a}.$$

La décomposition (97) de  $\mathcal{C}_J$

$$(101) \quad \mathcal{C}_J = \sum_{l, l'} (E_{l'} - E_l) \mathcal{P}_{P_{ll'}^{(0)}},$$

est aussi la décomposition spectrale. Les conditions (99) sont remplies, donc

$$(102) \quad \exp [-i \mathcal{C}_J t] = \sum_{l, l'} \exp [i(E_l - E_{l'})t] \mathcal{P}_{P_{ll'}^{(0)}}.$$

$\mathcal{C}_J$  n'admet pas d'inverse parce que  $\mathcal{C}_J \cdot J = 0$ . Pour faire l'inversion de ce commutateur on peut employer le hypéropérateur  $\mathcal{K}$

$$(103) \quad \mathcal{K} = \int_0^{+\infty} \exp [-i \mathcal{C}_J \tau] \varepsilon(\tau) d\tau = \sum_{l'} \sum_{l \neq l'} (E_{l'} - E_l)^{-1} \mathcal{P}_{P_{ll'}^{(0)}}.$$

$$(104) \quad \mathcal{K} \mathcal{C}_J = \mathcal{C}_J \mathcal{K} = 1 - \sum_l \mathcal{P}_{P_l^{(0)}}.$$

Il résulte de (103) que

$$(105) \quad \mathcal{R} \cdot A = - \sum_l \sum_{l' \neq l} (E_l - E_{l'})^{-1} \langle l | A | l' \rangle P_{ll'}^{(0)} = \sum_l K_l A P_l^{(0)}.$$

De (13) et (104) nous obtenons

$$(106) \quad \mathcal{C}_J \cdot S = IS, \quad S = S_a + \mathcal{R} \cdot (IS) = S_a + \sum_l K_l \cdot IS P_l^{(0)}.$$

De (106), par multiplication à droite par  $P_l^{(0)}$  nous obtenons (21).

On vérifie facilement que

$$(107) \quad \exp[-i\mathcal{C}_J t] \cdot B = \exp[iJt] B \exp[-iJt],$$

donc

$$(108) \quad \mathcal{R} \cdot A = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iJ\tau] A \exp[-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau.$$

De (108), et de la deuxième équation (106), nous obtenons (71).

## DEUXIÈME PARTIE

### MÉTHODES DYNAMIQUES DE PERTURBATIONS

#### La série de Peano.

7. — Le problème du mouvement en mécanique quantique se réduit à la détermination de l'opérateur unitaire du mouvement  $V(t)$ , défini par les équations

$$(109) \quad i \frac{dV}{dt} = HV, \quad V(0) = 1, \quad (\hbar = 1).$$

Dans la représentation de Schrödinger, la variation de la fonction d'onde est définie par l'équation de Schrödinger

$$(110) \quad i \frac{d\psi}{dt} = H\psi.$$

Dans la représentation de Heisenberg, les grandeurs physiques constantes sont représentées par des opérateurs variables, qui satisfont à l'équation de Hei-



senberg

$$(111) \quad i \frac{dA}{dt} = [A, H].$$

Nous pouvons résoudre (110) et (111) au moyen de  $V(t)$

$$(112) \quad \psi(t) = V(t - t_0)\psi(t_0), \quad A(t) = V^{-1}(t - t_0)A(t_0)V(t - t_0).$$

La solution formelle de (109) est

$$(113) \quad V(t) = \exp[-iHt],$$

en admettant que  $H$  ne dépend pas du temps.

Dans la méthode de la variation des constantes de Dirac, on peut aussi utiliser l'opérateur  $V$  et introduire  $W(t, t_0)$

$$(114) \quad V(t - t_0) = \exp[-iH_0t]W(t, t_0)\exp[iH_0t_0],$$

qui satisfait aux équations

$$(115) \quad i \frac{d}{dt} W(t, t_0) = H'_p(t)W(t, t_0), \quad W(t_0, t_0) = 1$$

$$(116) \quad H'_p(t) = \exp[iH_0t]H_p\exp[-iH_0t].$$

$W$  serait constant s'il n'y eut pas de perturbation et varierait lentement si la perturbation est assez petite. Pour calculer  $W(t, t_0)$  on le développe en série de Peano

$$(117) \quad W(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t, t_0), \quad W_n(t_0, t_0) = 0;$$

$$(118) \quad i \frac{d}{dt} W_n(t, t_0) = H'_p(t)W_{n-1}(t, t_0), \quad (W'_0(t, t_0) = 1).$$

Il résulte de (118) que

$$(119) \quad W_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t H'_p(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} H'_p(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} H'_p(\tau_n) d\tau_n.$$

On peut aussi obtenir la série de Peano d'un développement de Liouville-Neumann, en introduisant le hyperopérateur  $\mathcal{H}_p(t, t_0)$

$$(120) \quad \mathcal{H}_p(t, t_0) \cdot B(t) = -i \int_{t_0}^t H'_p(\tau) B(\tau) d\tau.$$

En intégrant par rapport au temps les deux membres de la première équation

(115), nous obtenons

$$(121) \quad W(t, t_0) = 1 + \mathcal{H}_p(t, t_0) \cdot W(t, t_0),$$

donc

$$(122) \quad W(t, t_0) = [1 - \mathcal{H}_p(t, t_0)]^{-1} \cdot 1 = [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_p^n(t, t_0)] \cdot 1.$$

Lorsque  $H_p$  est du premier ordre en  $\lambda$ , la série (117) est un développement selon les puissances de  $\lambda$ .

On peut faire directement le calcul de perturbations avec l'équation de Heisenberg, en introduisant l'opérateur  $A'(t, t_0)$

$$(123) \quad A(t) = \exp[iH_0(t - t_0)] A'(t, t_0) \exp[-iH_0(t - t_0)];$$

$$(124) \quad i \frac{d}{dt} A'(t, t_0) = [A'(t, t_0), H_p'(t_0 - t)], \quad A'(t_0, t_0) = A(t_0).$$

Il résulte de (124) que

$$(125) \quad A'(t, t_0) = A(t_0) + \mathcal{L}(t, t_0) \cdot A'(t, t_0),$$

avec

$$(126) \quad \mathcal{L}(t, t_0) \cdot B(t) = -i \int_{t_0}^t [B(\tau), H_p'(t_0 - \tau)] d\tau,$$

donc

$$(127) \quad A'(t, t_0) = [1 - \mathcal{L}(t, t_0)]^{-1} \cdot A(t_0) = A(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{L}(t, t_0)]^n \cdot A(t_0),$$

$$(128) \quad [\mathcal{L}(t, t_0)]^n \cdot A(t_0) = i^n \int_0^{t_0-t} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \times \\ \times \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n [[\dots [A(t_0), H_p'(\tau_n)], H_p'(\tau_{n-1})], \dots] H_p'(\tau_1).$$

Le développement (127) peut être déduit d'une série de Peano pour le hyperopérateur  $\mathcal{U}(t, t_0)$  défini par les équations

$$(129) \quad i \frac{d}{dt} \mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{C}_{H_p'(t_0-t)} \mathcal{U}(t, t_0), \quad \mathcal{U}(t_0, t_0) = 1,$$

puisque

$$(130) \quad A'(t, t_0) = \mathcal{U}(t, t_0) \cdot A(t_0),$$

et

$$(131) \quad \mathcal{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n(t, t_0),$$

$$(132) \quad \mathcal{U}_n(t, t_0) = i^n \int_0^{t_0-t} \mathcal{E}_{H_p(\tau_1)} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \mathcal{E}_{H_p'(\tau_2)} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} \mathcal{E}_{H_p'(\tau_n)} d\tau_n.$$

La série de Peano peut, donc, être considérée comme la base de tous les développements dynamiques usuels, mais on peut aussi les obtenir comme séries de Liouville-Neumann.

8. — La façon la plus convenable de développer la théorie dynamique des perturbations est celle qui se base sur la considération de l'opérateur  $V$ , puisque la probabilité de transition de l'état non perturbé  $\Phi_{l_0}^{(0)}$  à l'état non perturbé  $\Phi_l^{(0)}$ , dans l'intervalle de temps  $(t_0, t)$ , est  $|\langle l | V(t - t_0) | l_0 \rangle|^2$  ou  $|\langle l | W(t, t_0) | l_0 \rangle|^2$ . Pour calculer ces éléments de matrice nous avons les formules suivantes

$$(133) \quad V_n(t) = \exp[-iH_0 t] W_n(t, 0) = \sum_{l_r} P_{l_0, l_n}^{(0)} \langle l_0 | H_\nu | l_1 \rangle \dots \langle l_{n-1} | H_\nu | l_n \rangle \times \\ \times \left| \frac{\exp[-iE_{l_1}^{(0)} t] - \exp[-iE_{l_0}^{(0)} t]}{(E_{l_1}^{(0)} - E_{l_0}^{(0)})(E_{l_1}^{(0)} - E_{l_2}^{(0)}) \dots (E_{l_1}^{(0)} - E_{l_n}^{(0)})} + \dots + \frac{\exp[-iE_{l_n}^{(0)} t] - \exp[-iE_{l_0}^{(0)} t]}{(E_{l_n}^{(0)} - E_{l_0}^{(0)}) \dots (E_{l_n}^{(0)} - E_{l_{n-1}}^{(0)})} \right|.$$

Dans le développement de  $V(t)$ , nous avons des termes exponentiels en  $\exp[-iE_l^{(0)} t]$ , et aussi des termes séculaires dont la valeur absolue croît indéfiniment avec  $t$ . Nous savons que

$$(134) \quad V(t) = \sum_l P_l \exp[-iE_l t],$$

il est donc possible de combiner les termes dans la série de Peano de façon à obtenir un développement sans termes séculaires, qui ne contiendra que des termes exponentiels en  $\exp[-iE_l t]$ . L'existence de termes séculaires rend lente la convergence de la série de Peano pour des intervalles de temps considérables. Un développement sans termes séculaires est donc préférable du point de vue de la convergence et de la simplification des calculs.

Il est très difficile de combiner directement les termes de la série de Peano de façon à éliminer les termes séculaires. On peut, cependant, le faire d'une façon indirecte, en remarquant que

$$(135) \quad H = SJS^{-1}, \quad V(t) = S \exp[-iJt]S^{-1},$$

done, en utilisant le développement (62) de  $S_1$ , nous obtenons

$$(136) \quad V(t) = \sum_{E_l^{(0)}} [1 - K_{E_l^{(0)}}^{(0)}(H_\nu - \Delta E_l)]^{-1} P_{l_0}^{(0)} [1 - (H_\nu - \Delta E_l) K_{E_l^{(0)}}^{(0)}]^{-1} \exp[-iE_l t],$$

parce que  $S_1^{-1} = S_1^+$ . En introduisant les développements de Liouville-Neumann, nous obtenons une expressions explicite de  $V$

$$(137) \quad V(t) = \sum_{E_l^{(0)}} \exp[-iEt] \sum_{m,n=0}^{\infty} [K_{E_l^{(0)}}^{(0)}(H_p - \Delta E_l)]^m P_{E_l^{(0)}}^{(0)} [(H_p - \Delta E_l) K_{E_l^{(0)}}^{(0)}]^n,$$

Cette formule n'est pas tout à fait générale, parce que (62) ne l'est non plus. Nous donnerons plus tard une formule plus générale. Lorsque les valeurs propres ne sont pas dégénérées

$$(138) \quad V(t) = \exp[-iJt] + \sum_l \exp[-iEt_l] \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k \neq l} P_{k_l, k_{m+n}}^{(0)} \times \\ \times \frac{\langle k_1 | H_p - \Delta E_l | k_2 \rangle \dots \langle k_m | H_p - \Delta E_l | l \rangle \langle l | H_p - \Delta E_l | k_{m+1} \rangle \dots \langle k_{m+n-1} | H_p - \Delta E_l | k_{m+n} \rangle}{(E_l^{(0)} - E_{k_1}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{k_2}^{(0)}) \dots (E_l^{(0)} - E_{k_m}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{k_{m+1}}^{(0)}) \dots (E_l^{(0)} - E_{k_{m+n}}^{(0)})}.$$

### Modification de la méthode de Dirac.

9. — Notre modification de la méthode stationnaire de perturbations se base sur la division de  $H$  en deux parties  $J$  et  $I$ , tandis que la méthode usuelle se base sur la décomposition de  $H$  en  $H_0$  et  $H_p$ . Nous examinerons maintenant une modification de la méthode de Dirac, qui correspond à la méthode stationnaire basée sur la décomposition de  $H$  en  $J$  et  $I$ . Nous introduirons l'opérateur unitaire  $U(t, t_0)$

$$(139) \quad V(t - t_0) = \exp[-iJt] U(t, t_0) \exp[iJt_0].$$

$U(t, t_0)$  est déterminé par les équations

$$(140) \quad i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = I'(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = 1.$$

$I'(t)$  étant l'opérateur défini par la seconde équation (74).  $U(t, t_0)$  est aussi déterminé par l'équation intégrale

$$(141) \quad U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t I'(\tau) U(\tau, t_0) d\tau.$$

En particulier, nous pouvons déterminer  $U(t, \pm\infty)$  par l'équation

$$(142) \quad U(t, \pm\infty) = 1 - i \int_{\pm\infty}^t I'(\tau) U(\tau, \pm\infty) d\tau.$$



En comparant (142) avec (75), et en tenant compte de (69), nous voyons que

$$(143) \quad U(t, \pm\infty) = S_1'(t), \quad U(\pm\infty, t_0) = S_1'^{-1}(t_0).$$

Les équations (140) sont satisfaites en prenant

$$(144) \quad U(t, t_0) = S_1'(t)S_1'^{-1}(t_0) = S_1'(t)S_1'^{\pm}(t_0),$$

puisque  $S_1(t)$  est une solution de la première équation (76).

Les équations (143) et (144) montrent que la méthode dynamique de perturbations basée sur la décomposition de  $H$  en  $J$  et  $I$  se rattache plus étroitement aux méthodes stationnaires que la méthode de Dirac. Ainsi, nous obtenons de (143)

$$(145) \quad S_1 = U(0, \pm\infty), \quad S_1^{-1} = U(\pm\infty, 0).$$

L'opérateur  $U(t, t_0)$  peut être développé en série de Peano

$$(146) \quad U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, t_0);$$

$$(147) \quad U_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t I'(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} I'(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} I(\tau_n) d\tau_n =$$

$$= (-i)^n \sum_k P_{k_0, k_n}^{(0)} \langle k_0 | I | k_1 \rangle \langle k_1 | I | k_2 \rangle \dots \langle k_{n-1} | I | k_n \rangle \times$$

$$\times \int_{t_0}^t \exp[i(E_{k_0} - E_{k_1})\tau_1] d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \exp[i(E_{k_1} - E_{k_2})\tau_2] d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} \exp[i(E_{k_{n-1}} - E_{k_n})\tau_n] d\tau_n.$$

De (146) nous obtenons un développement pour  $V(t)$

$$(148) \quad V(t) = \exp[-iJt] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n'(t), \quad V_n'(t) = \exp[-iJt] U_n(t, 0).$$

L'expression explicite de  $V_n'(t)$ , analogue à celle de  $V_n(t)$  donnée par (133), est

$$(149) \quad V_n'(t) = \sum_k P_{k_0, k_n}^{(0)} \langle k_0 | I | k_1 \rangle \langle k_1 | I | k_2 \rangle \dots \langle k_{n-1} | I | k_n \rangle \times$$

$$\times \left\{ \frac{\exp[-iE_{k_1}t] - \exp[-iE_{k_0}t]}{(E_{k_1} - E_{k_0})(E_{k_1} - E_{k_2}) \dots (E_{k_1} - E_{k_n})} + \dots + \frac{\exp[-iE_{k_n}t] - \exp[-iE_{k_0}t]}{(E_{k_n} - E_{k_0})(E_{k_n} - E_{k_1}) \dots (E_{k_n} - E_{k_{n-1}})} \right\}.$$

Les dénominateurs qui s'annulent en (149) donnent lieu à des termes séculaires de  $V_n'(t)$ . Lorsque  $k_0 = k_{r_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, 3, \dots, p$ ) nous avons

$$(150) \quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^p \left[ \prod_{e_\alpha \neq r_\alpha} (E_{k_{r_\alpha}} - E_{k_{e_\alpha}}) \right]^{-1} (\exp[i(E_{k_0} - E_{k_{r_\alpha}})t] - 1) \right\}_{(k_{r_\alpha} = k_0)} =$$

$$= \frac{(-it)^p}{p!} \left[ \prod_{e \neq 0, r_{\alpha'}} (E_{k_0} - E_{k_e}) \right]^{-1} \quad (\alpha' = 1, 2, \dots, p),$$

et lorsque  $k_{r_\alpha} = k_r \neq k_0$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p+1$ )

$$(151) \quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p+1} \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_{r_\alpha}} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1} (\exp [i(E_{k_0} - E_{k_{r_\alpha}})t] - 1) \right\}_{(k_{r_\alpha} = k_r)} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!} \exp [i(E_{k_0} - E_{k_r})t] \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_r} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1} \quad (\alpha' = 1, \dots, p+1).$$

Pour établir (151) nous prendrons

$$(152) \quad E_{k_{r_\alpha}} = E_{k_r} + (\alpha-1)\varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ainsi nous obtenons

$$(153) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p+1} \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_{r_\alpha}} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1} (\exp [i(E_{k_0} - E_{k_{r_\alpha}})t] - 1) \right\} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_r} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1} \varepsilon^{-p} \sum_{\beta=0}^p (-1)^{p-\beta} \frac{\exp [i(E_{k_0} - E_{k_r} - \beta\varepsilon)t] - 1}{\beta! (p-\beta)!} \right\} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!} \exp [i(E_{k_0} - E_{k_r})t] \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_r} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1},$$

en tenant compte des identités

$$\sum_{\beta=0}^p \binom{p}{\beta} (-1)^{p-\beta} \exp [-i\beta\varepsilon t] = (\exp [-i\varepsilon t] - 1)^p \sum_{\beta=0}^p \binom{p}{\beta} (-1)^{p-\beta} = 0.$$

La formule (150) peut être établie par la même méthode.

On peut passer de (133) à (149) en remplaçant  $H_\rho$  par  $I$  et les  $E^{(0)}$  par les  $E$  correspondants. Puisque en (149) nous avons déjà les exponentielles  $\exp [-iE_\rho t]$ , nous pouvons espérer que les termes séculaires de tous les  $V'_n$ , en s'ajoutant, s'entre-détruisent. Cette élimination est une conséquence de l'équation (36) pour  $S_1$ , qui peut être mise sous la forme

$$(154) \quad \langle l | IS_1 | l \rangle = \langle l | I | l \rangle + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_r \neq l} \langle l | I | k_1^{(n)} \rangle \frac{\langle k_1^{(n)} | I | k_2^{(n)} \rangle \langle k_2^{(n)} | I | k_3^{(n)} \rangle \dots \langle k_n^{(n)} | I | l \rangle}{(E_l - E_{k_1^{(n)}})(E_l - E_{k_2^{(n)}}) \dots (E_l - E_{k_n^{(n)}})} = 0.$$

Considérons un terme séculaire de  $V'_n(t)$  en  $t^p \exp [-iE_{k_r}t]$

$$(155) \quad P_{k_0, k_n}^{(0)} \langle k_0 | I | k_1 \rangle \dots \langle k_{r_1} | I | k_{r_1+1} \rangle \dots \langle k_{r_2} | I | k_{r_2+1} \rangle \dots \langle k_{n-1} | I | k_n \rangle \times \\ \times \left[ \prod_{\rho \neq r_\alpha} (E_{k_r} - E_{k_{\rho_\alpha}}) \right]^{-1} \exp [-iE_{k_r}t] \frac{(-it)^p}{p!}.$$

Nous admettrons que  $r_1 < r_2 < \dots < r_{s+1}$  et nous mettrons  $r_2 - r_1 = s$ . Le terme (155) peut être mis sous la forme

$$(156) \quad \frac{\langle k_r | I | k_{r_1+1} \rangle \langle k_{r_1+1} | I | k_{r_1+2} \rangle \dots \langle k_{r_1+s-1} | I | k_r \rangle}{(E_{k_r} - E_{k_{r_1+1}})(E_{k_r} - E_{k_{r_1+2}}) \dots (E_{k_r} - E_{k_{r_1+s-1}})} B(t) = B_s(t).$$

Il y a dans  $V'_{n-q}(t)$  le terme séculaire  $B_{s-q}(t)$

$$(157) \quad B_{s-q}(t) = \frac{\langle k_r | I | k_{r_1+1} \rangle \dots \langle k_{r_1+s-q-1} | I | k_r \rangle}{(E_{k_r} - E_{k_{r_1+1}}) \dots (E_{k_r} - E_{k_{r_1+s-q-1}})} B(t) \quad (0 < q < s-1),$$

et dans  $V'_{n+q'}(t)$  le terme  $B_{s+q'}(t)$

$$(158) \quad B_{s+q'}(t) = \frac{\langle k_r | I | k_{r_1+1} \rangle \dots \langle k_{r_1+s+q'-1} | I | k_r \rangle}{(E_{k_r} - E_{k_{r_1+1}}) \dots (E_{k_r} - E_{k_{r_1+s+q'-1}})} B(t) \quad (q' > 0).$$

En ajoutant tous ces termes séculaires, nous voyons qu'ils s'entre-détruisent puisque

$$(159) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_n}^{n > r_1} B_m(t) = \langle k_r | I S_1 | k_r \rangle B(t) = 0.$$

Il résulte des considérations précédentes que nous pouvons supprimer tous les termes séculaires dans le développement (148) de  $V(t)$  et écrire

$$(160) \quad V(t) = \exp [-iJt] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n(t),$$

$$(161) \quad \bar{V}_n(t) = \sum_{r=1}^n \sum_{k_r^{(n)} \neq k_s^{(n)}} \sum_{k_s^{(n)}} P_{k_0^{(n)}, k_r^{(n)}}^{(0)} \langle k_0^{(n)} | I | k_1^{(n)} \rangle \dots \langle k_{n-1}^{(n)} | I | k_n^{(n)} \rangle \times \\ \times \frac{\exp(-iE_{k_r^{(n)}}t) - \exp(-iE_{k_0^{(n)}}t)}{\prod_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} (E_{k_r^{(n)}} - E_{k_s^{(n)}})}.$$

10. — Nous pouvons obtenir un développement sans termes séculaires pour  $V(t)$  en introduisant dans la deuxième formule (135) l'expression (63) de  $S_1$

$$(162) \quad V(t) = \sum_{E_l} (1 - K_{E_l} I)^{-1} P_{E_l}^{(0)} (1 - I K_{E_l})^{-1} \exp(-iE_l t).$$

Lorsqu'on peut développer les opérateurs inverses, dans (162), en série de Liouville-Neumann, (162) nous donne une formule analogue à (137), mais plus générale

$$(163) \quad V(t) = \sum_{E_l} \exp[-iE_l t] \sum_{m, n=0}^{\infty} (K_{E_l} I)^m P_{E_l}^{(0)} (I K_{E_l})^n.$$

Dans le cas de niveaux non dégénérés, nous avons

$$(164) \quad V(t) = \exp[-iJt] + \sum_l \exp[-iE_l t] \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k \neq l} P_{k_1, k_{m+n}}^{(0)} \times \\ \times \frac{\langle k_1 | I | k_2 \rangle \dots \langle k_m | I | l \rangle \langle l | I | k_{m+1} \rangle \dots \langle k_{m+n-1} | I | k_{m+n} \rangle}{(E_l - E_{k_1}) \dots (E_l - E_{k_m})(E_l - E_{k_{m+1}}) \dots (E_l - E_{k_{m+n}})}.$$

Ce développement est équivalent à (160). Réciproquement, nous pouvons obtenir de (160) le développement de  $S_1$  et ceux pour les fonctions propres perturbées. En effet, il résulte de (143) que

$$(165) \quad S_1 = U(0, -\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V(-t_0) \exp[-iJt_0].$$

Puisque

$$(166) \quad V(-t_0) = \exp[iHt_0] = V^+(t_0),$$

nous avons

$$(167) \quad V(-t_0) = \exp[iJt_0] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n^+(t_0).$$

Il résulte de (161) que

$$(168) \quad \bar{V}_n^+(t_0) \exp[-iJt_0] = \\ = - \sum_{r=1}^n \sum_{k_r^{(n)}} \sum_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} P_{k_n^{(n)}, k_0^{(n)}}^{(0)} \frac{\langle k_n^{(n)} | I | k_{n-1}^{(n)} \rangle \dots \langle k_1^{(n)} | I | k_0^{(n)} \rangle}{\prod_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} (E_{k_r^{(n)}} - E_{k_s^{(n)}})} \times \\ \times \{ \exp[i(E_{k_r^{(n)}} - E_{k_0^{(n)}})t_n] - 1 \},$$

done

$$(169) \quad \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \bar{V}_n^+(t_0) \exp[-iJt_0] = \\ = - \sum_{r=1}^n \sum_{k_r^{(n)}} \sum_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} P_{k_n^{(n)}, k_0^{(n)}}^{(0)} \frac{\langle k_n^{(n)} | I | k_{n-1}^{(n)} \rangle \dots \langle k_1^{(n)} | I | k_0^{(n)} \rangle}{\prod_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} (E_{k_r^{(n)}} - E_{k_s^{(n)}})}.$$

En tenant compte de l'identité

$$(170) \quad \sum_{r=1}^n \prod_{k_s^{(n)} \neq k_r^{(n)}} (E_{k_r^{(n)}} - E_{k_s^{(n)}})^{-1} = - [(E_{k_0^{(n)}} - E_{k_1^{(n)}}) \dots (E_{k_0^{(n)}} - E_{k_n^{(n)}})]^{-1},$$

nous obtenons le développement (63) de  $S_1$

$$(171) \quad \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} V(-t_0) \exp[-iJt_0] = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_0^{(n)}} \sum_{k_s^{(n)} \neq k_0^{(n)}} P_{k_n^{(n)}, k_0^{(n)}}^{(0)} \frac{\langle k_n^{(n)} | I | k_{n-1}^{(n)} \rangle \dots \langle k_1^{(n)} | I | k_0^{(n)} \rangle}{(E_{k_0^{(n)}} - E_{k_1^{(n)}})(E_{k_0^{(n)}} - E_{k_n^{(n)}})}.$$



### Perturbations adiabatiques.

11. — La modification de la méthode de Dirac, que nous avons considérée, a l'avantage de permettre l'élimination des termes séculaires, mais elle n'a pas le même degré de généralité que la méthode de Dirac. Il est évident que le développement (117) - (119) reste valable lorsque  $H_p$  dépend du temps. On peut même considérer un cas plus général de  $H_0$  et  $H_p$  dépendant tous les deux du temps, si l'on sait résoudre le problème du mouvement pour  $H_0(t)$ . c'est à dire, déterminer l'opérateur unitaire  $V_0(t, t_0)$

$$(172) \quad i \frac{d}{dt} V_0(t, t_0) = H_0(t) V_0(t, t_0), \quad V_0(t_0, t_0) = 1.$$

En prenant

$$(173) \quad W(t, t_0) = V_0^{-1}(t, 0) V(t, t_0) V_0(t_0, 0),$$

$$(174) \quad H_p'(t) = V_0^{-1}(t, 0) H_p(t) V_0(t, 0),$$

nous obtenons pour  $W(t, t_0)$  des équations de la forme (115)

$$(175) \quad i \frac{d}{dt} W(t, t_0) = H_p'(t) W(t, t_0), \quad W(t_0, t_0) = 1,$$

et le développement (117)-(119) reste valable.

Un cas intéressant de problèmes à hamiltonienne dépendente du temps est celui des hamiltoniennes variant lentement avec le temps (variation adiabatique). On peut alors prendre

$$(176) \quad H_0 = H(t_0), \quad H_p(t) = H(t) - H(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{H}(\tau) d\tau.$$

Nous pouvons introduire, comme dans le cas stationnaire, les opérateurs  $J$  et  $S$ , en considérant  $H(t)$  comme la hamiltonienne perturbée et  $H(t_0)$  comme la hamiltonienne non perturbée  $H_0$ . Nous avons

$$(177) \quad H(t) S(t) = S(t) J(t), \quad S^{-1}(t) = S^+(t);$$

$$(178) \quad J(t) \Phi_i^{(0)} = E_i(t) \Phi_i^{(0)}, \quad \Phi_i^{(0)} = \Phi_i(t_0).$$

Nous prendrons  $t_0 = 0$  et introduirons l'opérateur  $U(t)$

$$(179) \quad V(t, 0) = \exp \left[ -i \int_0^t J(\tau) d\tau \right] U(t).$$

En tenant compte de la relation

$$(180) \quad [J(\tau), J(\tau')] = 0,$$

nous trouvons

$$(181) \quad i\dot{U}(t) = I'(t)U(t), \quad U(0) = 1,$$

avec

$$(182) \quad I'(t) = \exp \left[ i \int_0^t J(\tau) d\tau \right] I(t) \exp \left[ -i \int_0^t J(\tau) d\tau \right],$$

et

$$(183) \quad I(t) = H(t) - J(t).$$

Nous pouvons développer  $U(t)$  en série de Peano et, ainsi, nous obtenons une généralisation de la méthode de Dirac modifiée, pour des hamiltoniennes variant lentement avec le temps.

Dans le traitement usuel du cas adiabatique <sup>(1)</sup> on développe la fonction d'onde  $\psi(t)$  en série de fonctions propres  $\Phi_i(t)$  de  $H(t)$

$$(184) \quad \psi(t) = \sum_i c_i(t) \Phi_i(t) \exp \left[ -i \int_0^t E_i(\tau) d\tau \right].$$

L'expression correspondante de  $V(t, 0)$  est

$$(185) \quad V(t, 0) = S(t) \exp \left[ -i \int_0^t J(\tau) d\tau \right] C(t), \quad C(0) = 1.$$

$C(t)$  satisfait à l'équation différentielle suivante

$$(186) \quad i\dot{C}(t) = L(t)C(t);$$

$$(187) \quad L(t) = -\exp \left[ i \int_0^t J(\tau) d\tau \right] \{ iS^{-1}(t)\dot{S}(t) \} \exp \left[ -i \int_0^t J(\tau) d\tau \right] = L^-(t),$$

qui nous donne une série de Peano pour  $C(t)$ . En tenant compte des relations suivantes

$$(188) \quad \dot{H} = [\dot{S}S^{-1}, H], \quad \Phi_i(t) = S(t)\Phi_i(0),$$

<sup>(1)</sup> M. BORN et V. FOCK: *Zeits. f. Phys.*, **51**, 165 (1928); P. GÜTTINGER: *Zeits. f. Phys.*, **73**, 169 (1931).

nous obtenons

$$(189) \quad S^{-1}(t)\dot{S}(t) = \sum_l \sum_{l' \neq l} P_{l,l'}^{(0)} \frac{(\Phi_l(t), \dot{H}(t)\Phi_{l'}(t))}{E_{l'}(t) - E_l(t)} + \sum_l P_l^{(0)} \langle l | S^{-1}(t)\dot{S}(t) | l \rangle.$$

Nous pouvons choisir les phases de  $\Phi_l(t)$  de façon à avoir

$$(100) \quad \langle l | S^{-1}(t)\dot{S}(t) | l \rangle = (\Phi_l(t), \dot{\Phi}_l(t)) = 0,$$

et ainsi

$$(191) \quad L(t) = i \sum_l \sum_{l' \neq l} P_{l,l'}^{(0)} \frac{(\Phi_l(t), \dot{H}(t)\Phi_{l'}(t))}{E_l(t) - E_{l'}(t)} \exp \left[ i \int_0^t \{ E_l(\tau) - E_{l'}(\tau) \} d\tau \right].$$

### Perturbation des opérateurs de densité.

12. — L'emploi des opérateurs de densité de von Neumann, permet de décrire des états plus généraux que les états purs définis par une fonction d'onde  $\psi(t)$ . L'équation de mouvement pour les opérateurs de densité  $\varrho(t)$  est

$$(192) \quad i\dot{\varrho}(t) = [H, \varrho(t)].$$

La solution formelle de (192) est

$$(193) \quad \varrho(t) = V(t-t_0)\varrho(t_0)V^{-1}(t-t_0).$$

H. S. GREEN <sup>(12)</sup> a donné un développement de  $\varrho(t)$  de forme compliquée. On peut obtenir un développement analogue à (127) par une méthode semblable. On trouve ainsi

$$(194) \quad \varrho(t) = \exp[-iH_0(t-t_0)]\varrho'(t, t_0) \exp[iH_0(t-t_0)];$$

$$(195) \quad \varrho'(t, t_0) = \varrho(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^{t-t_0} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n [ \dots [\varrho(t_0), H_p'(\tau_n)] \dots ], H_p'(\tau_1) ].$$

Un développement sans termes séculaires de  $\varrho(t)$  peut être obtenu de (193) et (160)

$$(196) \quad \varrho(t) = \left[ \exp[-iJ(t-t_0)] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n(t-t_0) \right] \varrho(t_0) \times \\ \times \left[ \exp[iJ(t-t_0)] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n^+(t-t_0) \right].$$

(12) H. S. GREEN: *Proc. Roy. Soc., A* 192, 166 (1948), App. I, pag. 178.

On peut aussi obtenir un développement de  $\varrho(t)$ , en introduisant dans (193) la série pour  $V(t-t_0)$  donnée par la méthode de Dirac

$$(197) \quad \varrho(t) = \left[ \exp [-iH_0(t-t_0)] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t-t_0) \right] \varrho(t_0) \times \\ \times \left[ \exp [iH_0(t-t_0)] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^+(t-t_0) \right].$$

---

#### RIASSUNTO (\*)

Diamo alcune forme modificate degli sviluppi della teoria quantistica delle perturbazioni per problemi stazionari o non stazionari. Le forme modificate dello sviluppo stazionario di Schrödinger sono più semplici dello sviluppo originale. La forma modificata dello sviluppo non stazionario di Dirac non contiene termini secolari e si riattacca strettamente a una delle forme modificate dello sviluppo di Schrödinger. I nostri sviluppi non sono serie di potenze di un parametro; possono essere tutti ottenuti come serie di Liouville-Neumann. Tutti questi sviluppi contengono le energie perturbate come lo sviluppo di Brillouin e Wigner. Si studia la teoria delle perturbazioni degli operatori di densità e quella delle perturbazioni degli operatori nella rappresentazione di Heisenberg.

---

(\*) Traduzione a cura della Redazione.



## Interaction Mean Free Path of the Particles Emitted in Cosmic Ray Nuclear Explosions.

A. LOVATI, A. MURA, C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI

*Istituto di Fisica dell'Università - Milano*

(ricevuto il 9 Febbraio 1951)

**Summary.** — The measurements of the interaction mean free path of the near minimum ionizing particles emitted in cosmic ray nuclear explosions are discussed. A new determination of this mean free path has been made at mountain altitude, using a counter controlled cloud chamber containing thin lead foils. The result is  $200 \pm 25\%$  g cm<sup>-2</sup> Pb.

### 1. — Introduction.

A remarkable interest is at present attributed to the knowledge of the mean free path for nuclear interaction of the near minimum ionizing particles (mostly  $\pi$  mesons and protons) emitted in nuclear explosions observed in cosmic rays. This interest is related with the possibility of getting information on the strenght of interaction of the  $\pi$  mesons with nucleons, and on the development of the nuclear cascade.

In the present paper we have the purpose of

- (i) discussing the measurements of the mean free path for nuclear interaction of the near minimum ionizing secondary particles of nuclear explosions;
- (ii) reporting the results of a new measurement of the overmentioned mean free path in lead.

### 2. — Mean Free Path of Nuclear Explosion Secondaries.

2.1. — When speaking of mean free path for nuclear interaction, we don't think obviously we can take into consideration all the possible interactions produced by the particles emitted in nuclear explosions. We confine here to

consider as « nuclear interaction » the events which would appear in photographic emulsions as nuclear transmutations (stars, explosions with relativistic particles) or as large angle scatterings.

2.2. — The measurements so far available of the mean free path (hereafter referred to  $L_s$ ) were obtained mostly by cloud chambers (<sup>1-6</sup>) and by photographic emulsions (<sup>7</sup>). The spread of reported values is rather remarkable; the values obtained by cloud chambers appear higher than the ones obtained by emulsions. It seems that this disagreement can be attributed to the circumstance that in the cloud chambers some of the nuclear interactions remain completely contained within the plates — usually of lead — placed in the chambers themselves. CAMERINI *et al.* think that the correction factors used by some authors taking into account this loss are too small.

Let's examine firstly the consistency of the cloud chamber observations. Uncorrected values of  $L_s$  in lead are reported in table I (column 2):

TABLE I.

Authors	$L_s$ , g cm <sup>-2</sup> Pb (uncorrected)	$L_s$ , g cm <sup>-2</sup> Pb (corrected)	Thickness of the plate in which the inter- action take place, g cm <sup>-2</sup> Pb
(1)	(2)	(3)	(4)
FRETTER (3 027 m altitude)	750	—	14
LOVATI, MURA, SALVINI and TAGLIAFERRI	825	330	13.2
(3 500 m altitude)	640	300	16.5 or 1.8
BROWN and MCKAY	551	316	14
(3 260 m altitude)	370	209	14
BUTLER, ROSSER and BARKER (sea level)	400	—	37.5

(<sup>1</sup>) A. LOVATI, A. MURA, G. SALVINI and G. TAGLIAFERRI: *Nuovo Cimento*, **6**, 207 (1949); **6**, 291 (1949); **7**, 36 (1950).

(<sup>2</sup>) W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 511 (1949).

(<sup>3</sup>) W. W. BROWN and A. S. MCKAY: *Phys. Rev.*, **77**, 342 (1950).

(<sup>4</sup>) C. C. BUTLER, W. G. V. ROSSER and K. H. BARKER: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 145 (1950).

(<sup>5</sup>) J. TINLOT and B. GREGORY: *Phys. Rev.*, **79**, 205 (1950).

(<sup>6</sup>) J. R. GREEN: *Phys. Rev.*, **80**, 832 (1950).

(<sup>7</sup>) U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK and H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

One may observe that the uncorrected values given by FRETTER and LOVATI *et al.* – who used very similar arrangements – are rather high and not too different. The value  $L_s = 370 \text{ g cm}^{-2}$  of BROWN and MCKAY and the one of BUTLER *et al.* are on the contrary definitely lower.

One of the effects of the experimental arrangement is clearly put to evidence by BROWN and MCKAY's measurements. The two values reported by them, obtained by the same chamber and simultaneously, are due to the different type of counter control, the highest value ( $L_s = 551 \text{ g cm}^{-2} \text{ Pb}$ ) being obtained by a counter control only above the chamber, the lowest above and below the chamber. As the authors themselves observe, the control above and below the chamber favours the revelation of the showers whose particles interact with the plates of the chamber: from that it follows a reduction of the apparent mean free path.

Another important effect of the experimental disposition is due to the different cut-off of the lowest energies (and multiplicities); or, say, to the selection on the energies of the particles producing the interactions here considered. So far, the mean free path is likely changeable with the multiplicity of penetrating particles in the event being considered (\*).

It may be believed that these two effects together allow variations of the apparent mean free path of magnitude even comparable with the one of the corrections used by a few authors taking into account the interactions completely contained in the plates of the chambers. As a consequence of this complicated situation of the experimental data it doesn't seem straightforward to bring the available cloud chamber measurements to indicate a single sufficiently accurate value of  $L_s$ .

2.3. – What has been said in n. 2.2 cannot be obviously applied to the case of photographic emulsions. Therefore, the values reported by CAMERINI *et al.* should be reliable. From the examination of photographic emulsions exposed at balloon flight altitudes, they deduce just about geometrical mean free paths, both for the  $\pi$  mesons and for all the shower particles emitted in the explosions. Yet, for the  $\pi$  mesons the statistics are still poor, and for all the shower particles the method by which  $L_s$  is deduced is rather indirect. Therefore it seems worthwhile to compare the conclusions of the Bristol group with the results obtained by a different technique, the cloud chamber one.

### 3. – The apparatus.

3.1. – A way of overcoming the difficulties inherent to a measurement of  $L_s$  in cloud chamber could be the employing of an experimental layout whereby (i) one should give up to the counter control (random expansions of

the chamber) and (ii) one should use within the chamber so thin plates that one could be sure that in practice all the interactions occurred in the plates can be recognized.

To get a convenient interaction rate within the plates of our chamber, we had to give up the fulfilment of the condition (i). Anyway, the selection on the energies (and multiplicities) due to our arrangement is limited: to have the chamber expanded two particles able to penetrate few centimeters of lead are sufficient. As for the selection in favour of the showers interacting within the chamber, we try to reckon it with a correction derived from the examination of the photographs themselves we got.

We couldn't quite fulfill even condition (ii): we have however used rather thin plates in order that the fraction of unrevealed interactions may entail a non essential correction.

3·2. — The research was carried out between August 1950 and January 1951 at the Laboratorio della Testa Grigia (3500 m a.s.l.) using a cloud chamber

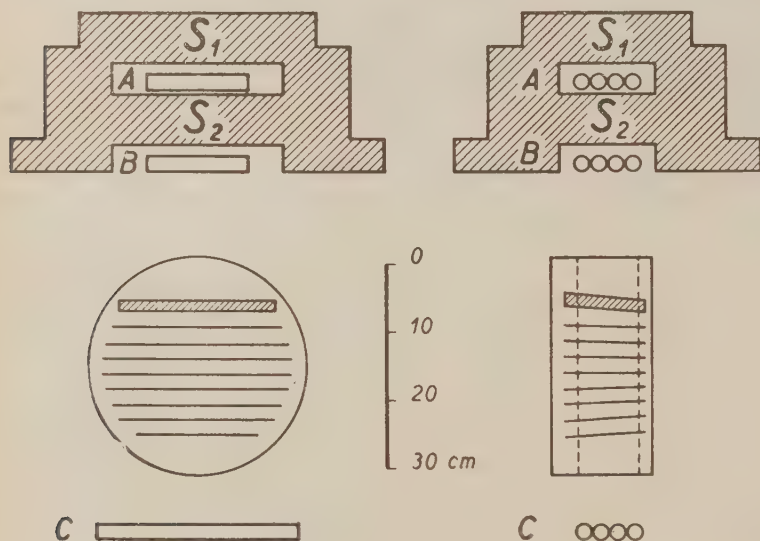


Fig. 1. — The experimental layout.

32 cm in diameter and of 9 cm illuminated depth. The experimental layout is represented in fig. 1.

The chamber is placed in a telescope containing three trays of counters  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . The trays consist of 4 counters each. Above the telescope there is



a layer  $S_1 = 8$  cm Pb, and between the trays  $A$  and  $B$  a layer  $S_2 = 8$  cm Pb. An adequate lateral screening is provided for the counter trays  $A$ ,  $B$ . The chamber is controlled by 5-fold coincidences: an  $A$ -counter (the counters of the tray  $A$  are paralleled) + two any counters at least of each of trays  $B$  and  $C$ .

The chamber contains 9 Pb plates: the highest 2 cm thick, the other eight 0.5 mm.

By this apparatus 3396 stereoscopic photos were taken in 664 operation hours.

#### 4. — Experimental results.

4.1. — We intended to derive from our photographs the mean free path for nuclear interaction in Pb of the lightly ionizing non electronic secondaries, emitted in the nuclear explosions occurred in lead  $S_1$  or  $S_2$  above the chamber: the non electronic nature of these secondaries is recognized owing to the lack of electromagnetic cascade multiplication through the  $22 \text{ g cm}^{-2}$  Pb plate.

The nuclear interactions occurred in the 0.5 mm Pb foils are recognized because in a point of the foil:

— at least one heavily ionizing particle can be seen converging with the incident particle;

— the incident particle can be seen scattered at a projected angle of at least  $10^\circ$ .

The 0.5 mm foils are thin enough in order that we may think that most explosions occurred in them are able to show in the chamber gas with heavily ionizing particles. Bearing in mind the size distribution of the explosions produced by ionizing particles reported by BROWN *et al.* <sup>(8)</sup>, and particularly the one of the secondary explosions reported by CAMERINI *et al.* <sup>(9)</sup>; bearing in mind that our explosions happen in lead and not in emulsion, and therefore are richer in protons; and utilizing the energy distribution of the protons from the Pb stars recently published by HODGSON <sup>(10)</sup>, we have estimated that about 20% of the secondary explosions happened in the foils, should remain unrevealed. We think therefore we observe the greatest part of the interactions due to fast protons and  $\pi$  mesons.

4.2. — The 482 nuclear explosions happened in the lead above the chamber were considered, which appeared in the chamber as penetrating or mixed

(<sup>8</sup>) R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING and C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

(<sup>9</sup>) CAMERINI *et al.*, loc. cit. in (<sup>7</sup>), table II.

(<sup>10</sup>) P. E. HODGSON: *Phil. Mag.*, **42**, 82 (1951).

showers. In these explosions 984 penetrating particles altogether were observed crossing in total  $3790 \text{ g cm}^{-2}$  lead (in foils 0.5 mm thick); these particles produced 17 nuclear interactions (16 explosions and 1 scattering at angle  $> 10^\circ$ ) within the 0.5 mm lead foils of the chamber.

The mean free path for nuclear interaction in lead should be then

$$\frac{3790}{17} = 223 \pm 25 \% \text{ g cm}^{-2} \quad (\text{standard error}).$$

To this result one must apply the two corrections to take into account the explosions entirely contained in the foils, and the selection in favour of the showers interacting in the chamber.

A right account of the error due to the counter selection is surely difficult. We have examined one by one the photographs showing the secondary interactions in the chamber foils (17 in all, as we said). Summing up it may be said that the coincidence counters would have been discharged by the penetrating or mixed showers coming from the lead above the chamber, even if the secondary explosion in the chamber had not happened. Only in three cases a doubt can subsist that the particles of the secondary explosions have been effective in revealing the event. Considering how many particles

TABLE II.

Number of the photograph	Number of penetrating particles from the primary interaction seen in the cloud chamber	Numer of the heavily ( <i>h</i> ) and lightly ( <i>s</i> ) ionizing particles from the secondary interaction
4.15	4	6 h + 0 s
6.12	2	scattering
15.13	2	2 h + 2 s
17.27	5	3 h + 2 s
30.24	3	4 h + 1 s
39.36	2	2 h + 0 s
47.31	1	3 h + 1 s
48.21	3	2 h + 1 s
57.32	2	5 h + 3 s
61.3	4	5 h + 3 s
75.21	3	1 h + 3 s
81.11	4	3 h + 2 s
85.15	4	5 h + 1 s
87.11	3	4 h + 1 s
90.6	3	2 h + 3 s
95.33	3	9 h + 5 s
98.24	3	8 h + 3 s

of the secondary explosion and how many of penetrating or mixed shower seem to direct themselves to the counters below the chamber, we thought we have to correct our results of a 10 %, owing to the counter selection. This correction partially at least compensates the one of 20 %, estimated in the preceding paragraph, because of the unrevealed interactions: so that coming to a conclusion

$$L_s \sim 200 \text{ g cm}^{-2}.$$

In table II are listed the secondary explosions we obtained.

4.3. - We summarize at last in table III the uncorrected values of  $L_s$  in Pb, we obtained both during the preceding researches and the present one.

All these values were found at the same mountain altitude (3500 m), by the same chamber and by rather similar chamber controlling devices.

TABLE III.

Thickness of the Pb plates, $\text{g cm}^{-2}$	Amount of Pb traversed, $\text{g cm}^{-2}$	Explosions + scattering $> 10^\circ$	Apparent mean free path, $\text{g cm}^{-2}$ Pb (*)
22	21 840	25 + 2	809 $\pm$ 20 %
16.5	34 280	43 + 4	729 $\pm$ 15 %
1.8	4 290	11 + 1	357 $\pm$ 30 %
0.5	3 790	16 + 1	223 $\pm$ 25 %

The succession of  $L_s$ -values reported in table III clearly shows the strong absorption of the heavily ionizing particles, by means of which the explosions occurring in the chamber plates were recognized.

It appears also that in the case of the thick plates the corrections, anyhow always uncertain, to be applied to  $L_s$ , are too great in comparison with the values observed experimentally, so that the corrected value that might be deduced would not be sufficiently reliable. Moreover, from table III it is seen that the correction factors formerly employed <sup>(1,3)</sup> were underestimated.

(\*) The selection due to the counter control may import a rising of the values of this column about 15-20% at most.

## 5. — Conclusions.

Very recently BARKER and BUTLER<sup>(11)</sup> have published an interaction length of shower particles, at sea level, of  $200 \text{ g cm}^{-2} \text{ Pb}$ . Their result is deduced for particles with momenta greater than  $10^9 \text{ eV/c}$ . To this limitation our result is not subject. On the other side, the secondary interactions we observe are perhaps a little more energetic than the ones reported by CAMERINI *et al.*<sup>(9)</sup>, if we judge from the relative frequency of the secondary interactions in which near minimum ionizing particles are ejected (see table II).

To conclude, taking together the result of CAMERINI *et al.*, our present, and the recent one of BARKER and BUTLER, we are of opinion that

a) the mean free path for nuclear interaction with the heavy nuclei of the shower particles is rather near to the geometrical value;

b) the same should hold true even for the  $\pi$  mesons, considering that they constitute the greatest part of the near minimum ionizing particles emitted in nuclear explosions<sup>(7,11)</sup>.

## 6. — Acknowledgements.

It is a pleasure to acknowledge our indebtedness to Prof. G. POLVANI, Director of this Institute, for his constant interest and encouragement in the course of this work.

Thanks are also due for the use of the facilities of the Laboratorio della Testa Grigia to the Director, Prof. G. BERNARDINI; and to Dr. M. BOSSI and Dr. P. CASALE for their valuable assistance in carrying on the measurements.

The financial helps of the University of Milan, of the Consiglio Nazionale delle Ricerche, of the Associazione Nazionale A.N.I.D.E.L. of Dr. Ing. L. SESSA and of the Gruppo Amici dell'Istituto di Fisica are gratefully acknowledged.

---

<sup>(11)</sup> K. H. BARKER and C. C. BUTLER: *Proc. Phys. Soc.*, A **64**, 4 (1951).

## RIASSUNTO

Vengono discusse le misure del cammino libero medio, per interazione nucleare, delle particelle vicino al minimo di ionizzazione emesse nelle esplosioni nucleari osservate nella radiazione cosmica. Si riconosce che le selezioni strumentali dei dispositivi usati in precedenti misure con camere di Wilson possono aver reso troppo incerto il risultato. Una nuova determinazione del suddetto cammino medio libero è stata fatta alla quota di 3500 m s.l.m., con una camera di Wilson contenente fogli sottili di Piombo. Il valore ottenuto ( $200 \pm 25\% \text{ g cm}^{-2} \text{ Pb}$ ) è in soddisfacente accordo con i recenti risultati di CAMERINI *et al.* e di BARKER e BUTLER.

## The Transition Effect of Extensive Air Showers.

D. D. MILLAR

*Dublin Institute for Advanced Studies*

(ricevuto il 12 Febbraio 1951)

**Summary.** — Measurements have been made of the transition effect of the extensive air showers of cosmic rays in absorbers of lead, iron, carbon and water. The results indicate that the photons of the showers are predominantly of lower energies than are the electrons, and forms of the energy spectra for the two components incident on the counter trays are deduced. The discrepancy between the absorption of the showers in air and in local absorbers of similar atomic weight, such as carbon and water, is briefly discussed.

### Introduction.

Investigation of the absorption of the extensive air showers has been concerned mainly with the penetrating component of the showers, measurements of the intensity being made under absorbers of high atomic number and thicknesses of several cascade units. DAUDIN and FRÉON <sup>(1)</sup> have, however, measured the increase in counting rate produced by the effects of pair production by incident photons in the absorber when their counters were shielded with 4 mm of lead. Similar observations of the transition effect of the extensive air showers have now been made using absorbers of lead, iron, carbon and water.

(<sup>1</sup>) J. DAUDIN and A. FRÉON: *Compt. Rend.*, **214**, 662 (1942).



## The Experimental Arrangement.

Coincidences were recorded between three trays of counters, each of area  $750 \text{ cm}^2$ , situated at the vertices of a triangle of side 4 metres. The counters of each tray were enclosed in a thin aluminium box, 1.5 mm thick, and immediately above each was a layer of wood, 9 mm thick resting on carbon which supported the absorber (fig. 1).

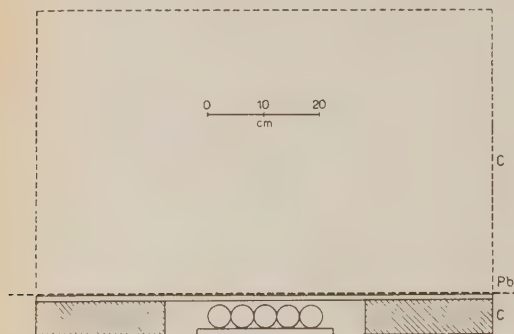


Fig. 1. — Counter tray with absorbers of full cascade unit of carbon, and of lead, in position.

above each was a layer of wood, 9 mm thick resting on carbon which supported the absorber (fig. 1). This remained in position throughout the experiment. Measurements of the counting rates with the various absorbers in position were alternated with measurements of the rate without absorber, the consistency of the unshielded rate together with daily testing affording a check on the correct functioning of the apparatus.

In the case of water, the absorber was contained in open tanks of aluminium, 1.5 mm thick, and these were left in position above the trays while observations with and without water were being made. The unshielded rate with the additional aluminium of the tanks above the trays is given in Table I, from which it will be observed that the presence of the aluminium makes no significant difference to the unshielded rate. The unshielded rate with tanks in position was, however, used in the case of water in evaluating the function  $\rho$  occurring in the last line of the table. The carbon absorber was in the form of coal consisting of 80% carbon, 7% hydrogen and the residue presumably of atomic number comparable with that of silicon.

## Geometry of the Arrangement.

In comparing the effects of the different absorbers on the counting rate equivalent thicknesses measured in cascade units were employed. Due to differences in the length of the cascade unit and in the densities of the various absorbers the geometry of the arrangement does not remain constant but alters from one absorber to another. In all cases, however, wide angle coverage was ensured by making the area covered by the absorber large compared

with that of the counter trays. This being so the effects of scattering in the absorber can be neglected and any dependence of the counting rate on the geometry of the arrangement may be attributed to the fact that a thick absorber will provide a larger effective collecting area than a thin one due to the spreading out of secondary showers originating in the absorber. The probability for such showers to be produced will be small in the thick absorbers of carbon and water, in which the critical energy is high, and since thicknesses not exceeding one cascade unit of these absorbers are used. With the absorbers of lead and iron, where production of secondary showers is more likely than with water and carbon, the absorbers are placed directly above the counters in order to minimise the effects of geometry, and are not spaced out above the trays to correspond to the spatial distribution of the carbon and water absorbers.

### Barometer Correction.

The counting rates were corrected for barometric fluctuations using a barometric coefficient of  $-11\%$  per cm Hg <sup>(2)</sup>. It will be seen from Fig. 2 where

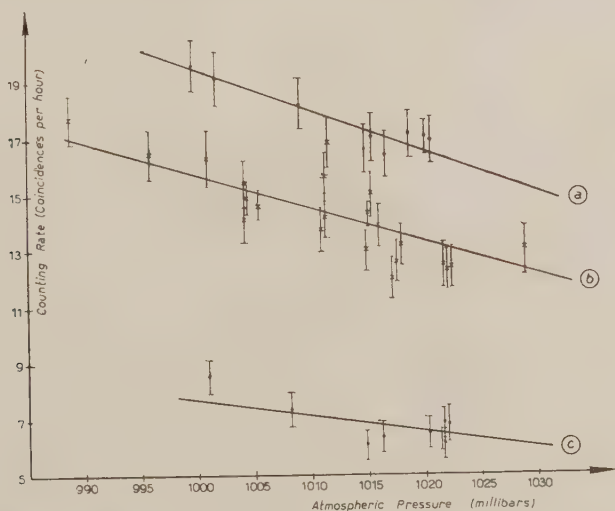


Fig. 2. - Counting rate as function of barometric pressure. The straight lines correspond to a barometer coefficient of  $-11\%$  per cm Hg.

a) 1 cascade unit Lead; b) No Shielding; c) 1 cascade unit Carbon

<sup>(2)</sup> D. D. MILLAR: *Proc. Roy. Ir. Acad.*, A **54**, 115 (1951).

the individual readings of the counting rates are plotted against barometric pressure for the cases with no absorber, and with a full cascade unit of lead, and of carbon, above the trays, that such a value is in good agreement with the observed barometer effect.

## Results.

The counting rates obtained with the different absorbers above the trays, corrected to the mean atmospheric pressure over the whole series of readings, are given in Table I, together with the unshielded rate.

TABLE I.

Absorber	H <sub>2</sub> O	C	C	Fe	Pb	Pb	Pb	Pb	Pb
Thickness g/cm <sup>2</sup>	22	26	52	14	3.0	6.0	12	18	24
Cascade units	.5	.5	1	1	.5	1	2	3	4
Shielded rate $R_s$ (coincidences/hr)	9.37 ±.22	8.96 ±.22	6.88 ±.17	13.19 ±.27	16.91 ±.25	17.44 ±.27	16.52 ±.43	13.64 ±.46	12.31 ±.52
Unshielded rate $R_0$ (coincidences/hr)	14.02 ±.25	14.09 ± .20							
$\rho = \left(\frac{R_s}{R_0}\right)^{2/3}$	0.764 ±.015	0.740 ±.014	0.620 ±.012	0.957 ±.016	1.130 ±.016	1.153 ±.016	1.112 ±.022	.968 ±.024	.914 ±.027

The coincidence rate between a number of counter trays of area  $S$  is known to be proportional to  $S^\gamma$ , where  $\gamma$  is the exponent of the density spectrum and is  $\sim 1.5$ . It follows then that any change in the coincidence rate caused by shielding the counter trays may conveniently be regarded as due to a change in the effective areas of the trays. The ratio of the effective area in the presence of shielding to the area without shielding will then be given by

$$\rho = \left(\frac{R_s}{R_0}\right)^{1/\gamma} = \left(\frac{R_s}{R_0}\right)^{2/3},$$

where  $R_s$  and  $R_0$  are the counting rates with and without absorber respectively. Values of  $\rho$  for the various absorbers are also given in Table I and are plotted as a function of absorber thickness in fig. 3.

### The Transition Curves.

From Fig. 3 it will be observed that the transition curve for lead shows an initial increase in the value of  $\rho$  with increasing thickness up to a maximum

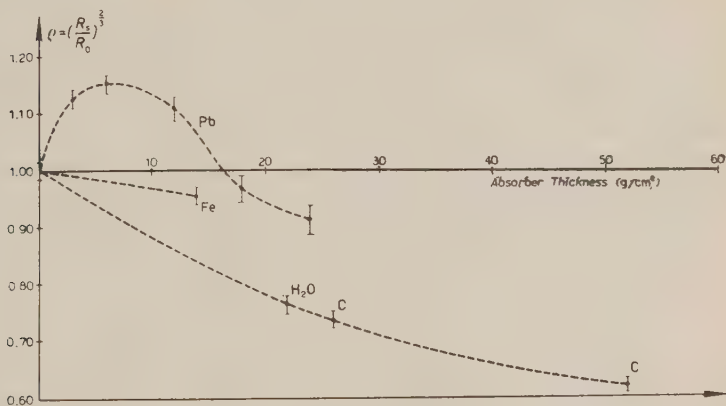


Fig. 3. — The Transition Curve.

in the region of one cascade unit, at which thickness the effect of such shielding on the counting rate is equivalent to an increase of 15% in the area of the unshielded trays. The other absorbers produce no such maximum and  $\rho$  decreases with increasing thickness. The absorption becomes stronger with decreasing atomic number of the absorber. Such an effect is readily explained in terms of incident photon-electron showers. The initial rise in the case of lead is due to the increase in probability with thickness for pair production by incident photons, and the increase in intensity due to this effect up to the maximum, corresponding to the mean free path for radiative collision by photons, outweighs the decrease in intensity due to absorption of incident electrons. Absorption of the incident and secondary electrons, the latter produced by photons, gives rise to the subsequent decrease. With the absorbers of iron, water and carbon, the decrease in intensity due to absorption of incident electrons is greater than the increase due to pair production by photons, and the contribution from the latter effect becomes smaller, as is to be expected, with decreasing atomic number.

### Discussion.

It is well established that the coincidence rate for three counter trays of area  $S$  can be represented by

$$R_0 \alpha \int_0^{\infty} (1 - \exp[-Sx])^3 \frac{dx}{x^{\gamma+1}},$$

where  $x$  is the density of the electrons at the trays and the exponent of the incident density spectrum is  $\gamma \approx 1.5$ . In the presence of an absorber the incident density spectrum remains unaltered but the density under the absorber will be different from the incident density  $x$ , because of absorption of incident electrons and materialization of photons by pair production in the absorber. The threefold shielded rate may therefore be written

$$R_s \alpha \int_0^{\infty} [1 - \exp[-S(Q + rP')x]]^3 \frac{dx}{x^{\gamma+1}},$$

where  $Q$  is the probability that an incident electron will penetrate the absorber and so be detected.  $P$  is the probability that an incident photon will be detected by pair production in the absorber and  $r$  the ratio of photon density to electron density in the incident showers. It thus follows that

$$\rho = \left( \frac{R_s}{R_0} \right)^{2/3} = Q + rP,$$

which is the expression plotted in Fig. 3 as a function of absorber thickness. The quantities  $Q$  and  $rP$  in this expression will depend upon the forms of the energy spectra of the incident electrons and photons and it is possible to deduce expressions for these spectra from the observed values of  $\rho$ .

If it is assumed that the absorption of electrons in the different absorbers is due entirely to ionization loss, i.e. neglecting loss of energy by radiative collisions, and further, that pair production by incident photons in the absorbers of carbon and water is negligible, then the common absorption curve for carbon and water may be taken as giving the absorption per g/cm<sup>2</sup> of the incident electrons and applied to the case of iron and lead, since ionization loss, within the approximation here involved, may be taken as independent of atomic number. The difference between the curves for iron and for lead and the water — Carbon curve then gives the contribution due to the photons in the first two absorbers. The water-carbon curve can be represented by an exponential with absorption coefficient  $-.12 \pm .001$  per g/cm<sup>2</sup>, and subtracting the  $Q$  term in relation (3) as given by this exponential from the



observed values of  $\rho$  we obtain the following values of  $rP$  the contribution due to photons

1/2 cascade unit lead	$.166 \pm .016$
1       »       » lead	$.224 \pm .017$
1       »       » iron	$.114 \pm .020$

where thicknesses of absorber up to one cascade unit only are considered. This being so, an incident photon will make on average not more than one radiative collision. If this is at the mid point of the absorber the resulting electrons of average energy half that of the parent photon must have energy sufficiently great to survive ionization loss in the remaining thickness of absorber. Thus the cut-off energy is given by  $\beta t$  where  $t$  is the thickness in cascade units and  $\beta$  the ionization loss per cascade unit. Assuming the contribution by photons to be proportional to the absorber thickness  $t$ , and to the number of incident photons of energy greater than this cut-off energy we then have

$$\begin{aligned} N(E > 3.5 \text{ MeV}) &\propto .332 \pm .032 \\ N(E > 7 \text{ MeV}) &\propto .224 \pm .017 \\ N(E > 25 \text{ MeV}) &\propto .114 \pm .020 \end{aligned}$$

which can be expressed in terms of a photon spectrum

$$N(> E) \propto E^{-.55 \pm .12}.$$

Similarly the absorption curve for water and carbon can be accounted for in terms of an incident electron spectrum

$$N(> E) \propto (E + E_c)^{-.64 \pm .06},$$

with  $E_c = 114$  MeV the critical energy in air, on the assumption that only electrons above 55 MeV will be recorded under the half cascade unit of water, and above 70 MeV and 140 MeV respectively under the half cascade unit and full cascade unit of carbon.

A more detailed calculation taking into account radiation loss by electrons and using the values of ionization loss as given by HALPERN and HALL <sup>(3)</sup> results in a spectrum for the electrons with exponent  $\gamma = .62$  instead of the above value .64. In the case of the photon spectrum the largest source of error in the above simple derivation arises from the assumption that all photons above the cut-off energy have an equal probability for pair production per cascade unit. Taking into account the logarithmic decrease of this probability with decreasing energy due to the effects of screening <sup>(4)</sup> and considering only the two cases of the full cascade unit of Lead and

<sup>(3)</sup> O. HALPERN and H. HALL: *Phys. Rev.*, **73**, 477 (1948).

<sup>(4)</sup> B. ROSSI and K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

of iron so that absorption by Compton effect may be neglected above the cut-off energy the exponent of the photon spectrum becomes  $\sim .8$  instead of  $.55$  as above.

The theory of electron-photon cascades according to BHABHA and CHAKRABARTY <sup>(5)</sup> predicts that a primary spectrum of form  $N(> E)\alpha E^{-\gamma}$  will result in an electron spectrum  $N(> E)\alpha(E + E_c)^{-\gamma}$  at large depths. It appears that the best agreement between cascade theory and observation is obtained if  $\gamma \geq 1.5$  <sup>(6)</sup>. The discrepancy between this value and the value of  $\sim .6$  derived above may be attributed to the fact that any counter arrangement such as used here will respond only to particle densities greater than a certain minimum imposed by the finite size of the counter trays. In this case the cut-off density lies between 13 particles per  $m^2$  and 1.3 particles per  $m^2$ , i.e.  $1/8$  and  $1/108$  <sup>(7)</sup>. The incident energy spectrum upon the unshielded trays will therefore be biased against the low energies which occur at the outer fringes of the shower and at the tail end of showers which have become dissipated before reaching the apparatus, where in both cases the density will be low. The above forms of the incident energy spectra cannot therefore be compared directly with the predictions of cascade theory. The same limitation has been noted by MITRA and ROSSER <sup>(8)</sup> in measuring the energy spectrum of the electrons of the extensive air showers by magnetic deflection of cloud chamber tracks. The energy distribution which they obtain conforms to a spectrum of the above form with exponent  $\gamma = 1.1 \pm .3$ .

It follows further from the present observations that the density of high energy photons incident on the apparatus is less than that of the electrons of the same energy. This fact is already assumed in the above derivation of the spectra, where pair production in the absorbers of carbon and water was neglected. Reference to the deduced spectra cannot therefore be made, to show that this is in fact the case. If however it is assumed that the ratio of the density of photons to electrons above an energy of 140 MeV, the cut-off energy for the full cascade unit of carbon, is, say, 1 : 4, then the observed value of  $\rho$  in this case ( $= .62$ ) will arise from 52% of the incident electrons plus a contribution by photons  $\sim .13 \cdot 7/9$ , since the asymptotic value of the probability per cascade unit for pair production may be assumed. Such an electron contribution will correspond to a spectrum  $(E_c/E + E_c)^{\gamma}$  with  $\gamma = .81$ . The contribution to  $\rho$  by electrons under one cascade unit of lead and of iron can then be deduced from this spectrum and the difference between the observed  $\rho$

<sup>(5)</sup> H. J. BHABHA and S. K. CHAKRABARTY: *Proc. Roy. Soc., A* **181**, 267 (1943).

<sup>(6)</sup> L. JANOSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), Chapt. VIII.

<sup>(7)</sup> G. COCCONI, V. COCCONI TONGIORGI and K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

<sup>(8)</sup> S. M. MITRA and W. G. V. ROSSER: *Proc. Phys. Soc., A* **62**, 364 (1949).

and this deduced electron contribution will give the contribution by photons. The values of the photon contribution are then .200 and .104 for lead and iron respectively. But from the assumed density of high energy incident photons alone one expects a photon contribution  $.13 \cdot 7/9 = .10$  in both cases. Thus the contribution in the case of iron can be explained entirely by the effects of such high energy photons, while it is clear, comparing the contribution by photons in lead and in iron that an appreciable part of that contribution in lead arises from photons in the range 7 MeV to 25 MeV, the cut-off energies in lead and iron, consequently it is reasonable to assume that in both cases photons of energy lower than 140 MeV must be effective. It can therefore be concluded that the ratio of photon density to electron density above an energy of 140 MeV is certainly less than .25 (and hence that the exponent of the electron spectrum must be less than .8). This is in qualitative agreement with what is to be expected if in general the cascade showers are being detected at a distance of several metres from the shower core (<sup>9</sup>). The electrons detected have been ejected from the core by Coulomb scattering, and since there is no equivalent mechanism for removing photons from the core those which are detected will be secondary to higher energy scattered electrons.

### Comparison with Absorption in Air.

The decrease in counting rate obtained on shielding the counter trays with carbon and water can be represented by an exponential coefficient of  $-0.018 \pm .001$  per g/cm<sup>2</sup>. On the other hand from the altitude measurements of HILBERRY (<sup>10</sup>), and MAZE, FRÉON and AUGER (<sup>11</sup>) and from the observed barometer coefficient of  $-11\%$  per cm Hg one obtains an absorption coefficient in the atmosphere of  $\sim -0.008$  per g/cm<sup>2</sup>. The absorption in carbon and water is therefore much stronger than in air although the atomic numbers and hence the critical energies of these absorbers are all of the same order of magnitude. The explanation lies in the fact that in a local absorber such as here, the absorption is measured of the electrons which have been scattered out of the shower core and these are absorbed by ionization loss. In the case of air on the other hand, the absorption evidenced by altitude and barometer dependence is rather that of the cascade-sustaining core itself from which the outer regions of the shower, the regions which are in general detected, are being continuously replenished, and absorption of this high energy core is determined by the mechanism of the cascade process rather than by ionization loss.

---

(<sup>9</sup>) J. ISE and W. B. FRETTER: *Phys. Rev.*, **76**, 933 (1949).

(<sup>10</sup>) N. HILBERRY: *Phys. Rev.*, **60**, 1 (1941).

(<sup>11</sup>) R. MAZE, A. FRÉON and P. AUGER: *Phys. Rev.*, **73**, 418 (1948).

A further point in connection with the barometer and altitude dependence of the intensity of the extensive air showers, is the fact that this is due not only to absorption of the showers in air, but also to the effect which change of pressure has on the lateral spread of the showers caused by changes in the length of the cascade unit with density of the air, and this will tend to counteract the effects of absorption.

### Acknowledgements.

The author is grateful to Professors L. JANOSSY and C. B. A. McCUSKER for valuable discussion and criticism and to Dr. D. M. RITSON and Dr. T. E. NEVIN for assistance. He is also indebted to the Sir JAMES CAIRD TRUST for the provision of a scholarship.

---

### RIASSUNTO (\*)

Sono state eseguite misure dell'effetto di transizione degli sciami estesi dell'aria in assorbitori di Piombo, Ferro, Carbonio e acqua. I risultati indicano che i fotoni degli sciami sono prevalentemente di energie inferiori a quelle degli elettroni e se ne deducono forme degli spettri di energia delle due componenti incidenti sui telescopi di contatori. Si discute brevemente la discrepanza tra l'assorbimento degli sciami nell'aria e negli assorbitori locali di peso atomico analogo come il Carbonio e l'acqua.

---

(\*) *Traduzione a cura della Redazione.*

# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## A Note on the $V$ Particle.

C. B. A. MC CUSKER and D. D. MILLAR

*Dublin Institute for Advanced Studies*

(ricevuto il 12 Marzo 1951)

During the course of an experiment on local penetrating showers of cosmic radiation we obtained the two photo-

graphs produced in the material above the chamber, strikes a lead plate, 2.5 cm thick, in the chamber. Several of the

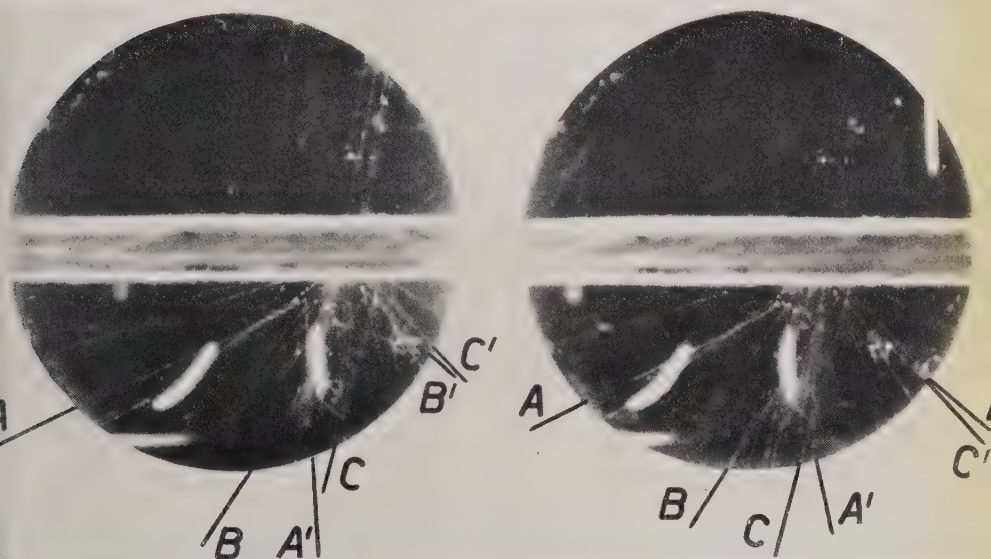


Photo 1.

graphs, reproduced as stereoscopic pairs below.

In the first of these photographs a penetrating shower of eight particles,

particles can be seen to have traversed the plate without interaction, but one particle has produced a secondary penetrating shower. Eleven of the par-



ticles of this shower, visible in the lower half of the chamber can be traced back to one point in the lead plate 1.5 cm below its upper surface. In addition there are three V shaped tracks marked *A* and *A'*, *B* and *B'*, *C* and *C'*. Two of

*et al.* <sup>(2)</sup>. They have been interpreted as the decay products of an unstable heavy neutral particle. A recent event, observed in a photographic plate <sup>(3)</sup> has shown the decay particles in that case to be a meson and a proton and a mass

Photo 2.

these pairs (*A* and *B*) can be seen to originate in a point in the gas. The other pair (*C*) comes from a point so near to the lead plate that it is not possible to say with certainty that the origin is in the gas. These pairs of tracks are similar in appearance to the V tracks discovered by ROCHESTER and BUTLER <sup>(1)</sup>, and confirmed by SERIFF

of  $2370 \pm 60 m_e$  has been assigned to the neutral particle.

The second of the two photographs shows a shower of three particles, (1, 2 and 3) coming from the back of the lead plate, a region not illuminated. Starting in the middle of the illuminated region

<sup>(1)</sup> G. D. ROCHESTER and A. BUTTER: *Nature*, **160**, 855 (1947).

<sup>(2)</sup> A. J. SERIFF, R. B. LEIGHTON, C. HSIAO, E. W. COWAN and O. C. D. ANDERSON: *Phys. Rev.*, **78**, 290 (1950).

<sup>(3)</sup> HOPPER and S. BISWAS: *Phys. Rev.*, **80**, 1099 (1950).

is another  $V$  track ( $\bar{V}$ ,  $V'$ ). The plane of this pair of tracks contains the point of origin of the shower.

If the interpretation of the  $V$  tracks is correct, these two photographs would suggest that the heavy neutral particles can be produced in groups in a single nucleon-nucleus encounter and that the decay in at least some cases is a decay into two particles only.

The lifetime of the particles estimated from these photographs is of the order of  $10^{-10}$  s. This is in agreement with the estimates of the other observers.

We wish to thank Dr. G. D. RO-CHESTER and Dr. C. C. BUTLER for communicating unpublished results and for their helpful comment and Mr. H. MESSEL and Dr. T. E. NEVIN for help and criticism.



## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

*Scelta di scritti di Augusto Righi* - a cura di G. C. DALLA NOCE e G. VALLE. Un volume in-8° gr., pp. XXXI+374, Zanichelli, Bologna, 1950. Lire 4000.

Pubblicato sotto gli auspici della Società Italiana di Fisica in occasione del primo centenario della nascita di RIGHI, questo volume comprende circa la decima parte dei numerosissimi scritti dell'illustre fisico. L'antologia è comunque più che sufficiente a rievocare, com'era nelle intenzioni dei promotori, il cinquantennio di attività scientifica e divulgativa di questo multiforme sperimentatore. Vi troviamo infatti incluse le memorie più significative, da quella sull'elettrometro a induzione da lui ideato nel 1872, anticipando in certo modo il generatore di Van de Graaff, a quella sulla progettata modifica dell'esperienza di Michelson e Morley (pubblicata postuma).

L'interesse che molti di questi scritti oggi conservano è, naturalmente, in buona parte retrospettivo: si respira leggendo l'atmosfera dell'epoca, quanto mai feconda, in cui la fisica trasferì il proprio centro di gravità dalla meccanica alla elettrologia. Data però l'entità dei contributi forniti da RIGHI a questo progresso, la prospettiva che si ricava da tale lettura è particolarmente viva, ricca degli spunti polemici offerti dal contrasto tra la giovane fisica di fine secolo e il

precedente corpo di dottrine. Righi fu, per esempio, tra i pochi che continuarono a sostenere l'interpretazione corpuscolare ed elettrica data da CROOKES alla propria esperienza anche dopo che HERTZ ebbe mostrato che i raggi catodici attraversavano sottili lamine metalliche alla stregua di onde luminose. Delle belle esperienze dedicate da RIGHI alle particelle cariche, cui non era ancora stato dato il nome di ioni, qui troviamo traccia in vari scritti, dai primi sulle « ombre elettriche », del 1881, agli ultimi su quelli che egli chiamava « raggi magnetici », del 1918.

Oltre che le esperienze più originali, sugli effetti magneto-ottici e magneto-termici, sono particolarmente interessanti anche oggi, specie dal punto di vista didattico, le celebri indagini « sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda e sul loro impiego nella produzione di fenomeni analoghi ai principali fenomeni dell'ottica », nonché le esperienze sulla composizione delle oscillazioni di due pendoli, sulle scariche nei gas rarefatti e sulla ionizzazione prodotta dai raggi ultravioletti e X.

Ricca di illustrazioni, l'edizione è riuscita molto attraente, grazie all'attenzione e alle cure dei professori VALLE e DALLA NOCE e dell'editore Zanichelli, che a suo tempo diffuse i volumi riassuntivi del RIGHI stesso.

V. SOMENZI



H. DÄNZER - *Einführung in die theoretische Kernphysik* (della Wissenschaftliche Bücherei - Gruppe Bibliotheca Biophysica). Un volume di 187 pagine con 40 figure, Verlag und Druck G. Braun, Karlsruhe.

Questo volume fa parte della *Bibliotheca Biophysica* diretta da B. RAJEWSKY il noto biofisico, attuale direttore del « Kaiser-Wilhelm Institut für Biophysik » di Francoforte; come avverte lo stesso RAJEWSKY nella presentazione del libro del DÄNZER, questa collezione vuole fornire una visione d'insieme di quei domini più moderni della Fisica chimica, Biologia e Medicina e dei risultati più recenti che costituiscono la base indispensabile per chi si dedica alla ricerca biofisica: a questi ricercatori i volumetti della *Bibliotheca Biophysica* vogliono venire in aiuto, offrendo loro la possibilità di impadronirsi dei concetti caratteristici delle diverse discipline, e fornendo, sotto forma di piccoli trattati, una raccolta ordinata e sistematica del materiale.

Dubitiamo tuttavia che il DÄNZER, per la sua parte, abbia assolto questo compito. Si dia infatti un'occhiata all'indice e ai titoli degli otto capitoli in cui la trattazione è suddivisa: masse nucleari; scissione; reazioni nucleari; irraggiamento da nuclei eccitati; diffusione di neutroni da parte di protoni; frenamento di neutroni da parte di protoni; frenamento di neutroni da parte di sostanze idrogenate; influenza della buca di potenziale nucleare sulla cattura e sull'emissione di particelle cariche (con un cenno alla teoria di Gamow). Segue un'ampia appendice matematica.

Salta subito all'occhio una certa mancanza di proporzioni: ben tre capitoli sulla diffusione e il rallentamento di neutroni mentre, per citare una tra le numerose lacune, manca un qualsiasi riferimento alla emissione  $\beta$ ; non si comprende come all'Autore possa essere sfuggito l'interesse che tale argomento riveste per la categoria di studiosi cui il libro è destinato.

Non era facile conciliare le esigenze di una certa completezza ed organicità con le dimensioni modeste del volume: tuttavia sembra che l'Autore non si sia neppure posto il problema. Il libro costituisce infatti, più che una introduzione teorica alla fisica nucleare, una raccolta di saggi su argomenti più o meno classici di fisica nucleare; la scelta dei quali, come si vede, è stata fatta dall'Autore in base a criteri non sempre chiari.

Ma se la scelta degli argomenti, soprattutto per i fini che la collezione si propone, è molto discutibile, non si può dire tuttavia che l'opera manchi di alcuni pregi: l'esposizione è chiara, talvolta con spunti di una certa originalità; vi si avverte costante la preoccupazione dell'Autore di tenersi su un piano il più possibile accessibile anche da parte di chi sia meno provvisto di basi teoriche adeguate. Tale preoccupazione può spiegare il frequente, forse eccessivo, ricorso ad analogie con fenomeni relativi ad altri campi della fisica; dalla suggestione di tali analogie l'Autore si lascia un po' trascinare anche quando queste rivestano carattere più formale che sostanziale: vedasi, ad esempio, l'analogia elettromagnetica a proposito della formula di Breit-Wigner.

In libri del genere sarebbero desiderabili frequenti riferimenti a dati numerici e a fatti sperimentali; essi mancano invece quasi del tutto in quello del DÄNZER. Scarsi in genere i riferimenti bibliografici, scarsissimi quelli degli autori non tedeschi: nella bibliografia che chiude il volume l'unico autore straniero cui è toccato l'onore della citazione è il RASETTI.

C. SALVETTI

E. KRUMM - *Im Zauberreich der Lichtwellen*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1950, pagg. VIII+191, figure 145.

Il titolo (« Nel regno incantato delle onde luminose ») può far pensare a un libro divulgativo di fisica romanizzata in



stile giornalistico. Non è così. Questo libro può essere paragonato, per l'ottica fisica, a quello che il famoso « Le meraviglie dell'istinto negli insetti » è per l'entomologia. Come FABRE, l'autore ha l'anima del naturalista, ama la ricerca ed è un po' romantico; ma unisce a questo notevolissime doti di didatta; conosce assai bene il problema di far capire la fisica a un uditorio privo di nozioni matematiche e in una scuola molto povera di materiale didattico, e sa destare l'attenzione con un'esposizione molto chiara e con una logica serrata, priva di qualsiasi dogmatismo, a base di interrogativi posti da una esperienza e risolti da un'altra; il tutto condito qua e là con riferimenti storici, osservazioni e citazioni di varia natura, echi di dispute celebri, ecc.

Molto spazio è dedicato all'esecuzione pratica dell'esperienza in un'aula, con mezzi di fortuna o quasi. Tranne le lenti, tutto il materiale è costruibile con minimi mezzi e pochissimi attrezzi. Strisce di cartone o di latta per i telaietti, lamine di rasoio per le fessure, pezzi di sughero o di legno per i supporti, ... questo è il materiale usato; riflesso della situazione contingente delle scuole tedesche (e cronica di molte italiane).

Gli argomenti trattati sono quelli dell'ottica fisica classica: teoria dei colori (seguita da un intero capitolo dedicato alle vedute di NEWTON e di GOETHE, espresse e messe in raffronto tra loro e con l'esperienza in una serie ben connessa di « punti »); spettroscopia; diffrazione; interferenza; polarizzazione.

Trattazione a base strettamente sperimentale, elementare, ma non troppo, mai banale. A mio avviso troppo poco spazio è dedicato all'ottica dei cristalli, forse per la difficoltà di fare in maniera molto economica le esperienze. È messa molto bene in evidenza l'analoga con i fenomeni ondulatori meccanici. Le esperienze nella « vasca a onde » (fabbricata con l'anta di una finestra), didatticamente molto importanti, formano l'oggetto del primo paragrafo di ogni capitolo, riguardante la diffrazione e l'interferenza.

Ogni capitolo termina con un breve paragrafo di riferimenti storici, e l'ultimo capitolo è dedicato alla vita dei ricercatori più illustri.

Il libro è particolarmente raccomandabile per gli insegnanti.

A. PERSANO

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA